Suites numériques

EL KYAL MOHAMED

➢ Suite arithmétique – Suite géométrique :

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + ... + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + ... + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}\right)$
a ,b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

➢ Suite majorée, minorée, bornée :

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n\in I}$ est **majorée** par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
- $(u_n)_{n\in I}$ est **minorée** par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- $(u_n)_{n\in I}$ est **bornée** si $(u_n)_{n\in I}$ est majorée et minorée

➢ Monotonie d'une suite :

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n\in I}$ est **croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est **constante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

➢ Limite de la suite (n^α) avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

- **Limite de la suite $\left(q^{n}\right)$ avec $q \in \mathbb{R}$:**

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite $\left(q^{n}\right)$ n'admet pas de limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = +\infty$

- **Critère de convergence d'une suite :**

  - *Toute suite croissante et majorée est convergente*
  - *Toute suite décroissante et minorée est convergente*

$$\left.\begin{array}{l} \left|u_{n} - \boldsymbol{\ell}\right| \leq v_{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_{n} = \boldsymbol{\ell}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{n} \leq u_{n} \leq w_{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n} = \boldsymbol{\ell} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_{n} = \boldsymbol{\ell} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_{n} = \boldsymbol{\ell}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n} \geq v_{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n} \leq v_{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n} = -\infty$$

- **Suite de type $v_{n} = f\left(u_{n}\right)$:**

Si $\left(u_{n}\right)_{n \in I}$ une suite convergente de limite $\boldsymbol{\ell}$ et si f une fonction continue en $\boldsymbol{\ell}$ alors la suite $\left(v_{n}\right)$ définie par: $v_{n} = f\left(u_{n}\right)$ est convergente de limite $f\left(\boldsymbol{\ell}\right)$

- **Suite de type $u_{n+1} = f\left(u_{n}\right)$:**

Soit $\left(u_{n}\right)$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{0} = a \\ u_{n+1} = f\left(u_{n}\right) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{où } f \text{ une fonction}$$

Si :

- *f une f continue sur un intervalle I*
- $f\left(I\right) \subset I$
- $a \in I$
- *$\left(u_{n}\right)$ une convergente*

alors : la limite $\boldsymbol{\ell}$ de la suite $\left(u_{n}\right)_{n \in I}$ est solution de l'équation : $f\left(x\right) = x$