Théorèmes des opérations sur les limites :

Si $l \neq 0$ alors : $l \times \infty = \infty$ et $\frac{l}{0} = \infty$.

$\forall\ l \in \mathbb{R}$: $\frac{\infty}{l} = \infty$; $\frac{l}{\infty} = 0$ et $\infty \times \infty = \infty$

Les formes indéterminées :

$0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $(+\infty)+(-\infty)$

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2}x^3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4+3x+1$; $\lim\limits_{x\to2} 3x^2-2x+7$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-2)x-7x^2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3+4x)^2$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{2x^4-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^4+x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-\sqrt{2}}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-1)(2x+6)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)(x^2-1)}{x^4-x^2+x+5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+2x)-3x^3+2}{x^3+2x^2+1}$;

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^3-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1}$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{4x+1}}$

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

Exercice 6 :

On donne une fonction u définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq u(x) \leq x$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{u(x)}{x^2}.$$

Montrer que si $x \geq 1$; $|f(x)-1| \leq \frac{1}{x}$.

Que peut-on en déduire sur la limite de f en $+\infty$?

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = \sqrt{x^2+1}-(x+1)$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x}$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} - 1$

puis, vérifier que : $1+\sqrt{x^2+1} \geq 2$

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $|g(x)+1| \leq \frac{1}{2}|x|$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

Exercice 8 :

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+3x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x > 0$, on a :

   $9x^2 \leq 9x^2+3x+1 \leq (3x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$:

   $3 \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x}$

3. En déduire la limite de f en $+\infty$

f est une fonction numérique dont l'expression est :

$$f(x) = ax + \frac{2}{x-b}$$

Déterminer a et b sachant que :

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 11$

Exercice 9 :

Soit n est un entier naturel Calculer suivant les valeurs de n , les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^n-7x^2-2x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (nx^2-7x^2-2x+1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^n-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^2+1}{2x^n+x^3-1}$

M. Said CHERIF : Professeur de Mathématique au Lycée Technique Maghreb Arabe OUJDA