

## Continuité

EL KYAL MOHAMED

### ➤ Continuité en un point :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### ➤ Continuité à droite - Continuité à gauche :

- $f$  est continue à droite en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- $f$  est continue à gauche en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
- $f$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$

### ➤ Continuité sur un intervalle :

- $f$  est continue sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  si  $f$  est continue en chaque élément de  $]a, b[$
- $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$  si  $f$  est continue sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  et  $f$  est continue à droite en  $a$  et à gauche en  $b$

### ➤ Opérations sur les fonctions continues:

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel

- Les fonctions  $f + g$ ,  $f \times g$ ,  $kf$  et  $f^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , sont continues sur  $I$
- Les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$  si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$

#### Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- La fonction :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$

### ➤ Composé de deux fonctions continues:

Si  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction continue sur l'intervalle  $f(I)$ , alors la fonction  $gof$  est continue sur  $I$

### ➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

## Cas particuliers :

Soit  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle  $f(I)$

L'intervalle $I$	L'intervalle $f(I)$	
	$f$ est strictement croissante sur $I$	$f$ est strictement décroissante sur $I$
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a, b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]a, b[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a, +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a, +\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]-\infty, a]$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$]-\infty, a[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$\mathbb{R}$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

## ➤ Théorème des valeurs intermédiaires :

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout réel  $\beta$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un réel  $\alpha$  de l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(\alpha) = \beta$

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $[a, b]$  telle que  $f(a) \times f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a, b]$

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a, b]$  telle que  $f(a) \times f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a, b]$