

Exercice 01 : 4,5 points

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5$ pour tout n de \mathbb{N}

1) calculer u_1 et u_2

2.a) montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n < 15$

2.b) montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 5$

2.c) vérifier que pour tout n de \mathbb{N} : $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

2.d) en déduire que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

3) on pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = u_n - 15$

3.a) montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

3.b) calculer v_0 et montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) calculer u_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 02 : 4,5 points

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes. On tire simultanément au hasard trois boules du sac

On considère les événements suivants :

A : «les trois boules tirées sont blanches»

B : «les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux»

C : «il n'y a aucune boule blanche parmi les trois boules tirées»

1.a) montrer que $p(A) = \frac{1}{56}$

1.b) calculer $p(B)$ et $p(C)$

2) soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.

2.a) copier et remplir le tableau ci- contre en justifiant les réponses

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$				

2.b) calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 03 : 11 points

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable

réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

2.a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2.b) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

2.c) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et interpréter géométriquement

3.a) montrer que : $\forall x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

3.b) calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f

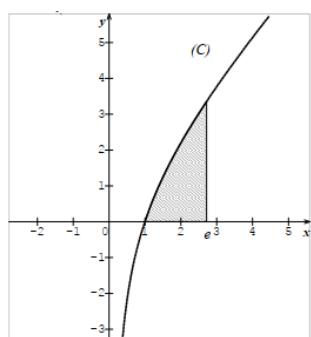
3.c) en déduire le signe de f sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$

3.d) déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C)
point d'abscisse 1

4) dans la figure (C) est courbe de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

4.a) en utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln(x) dx = 1$

4.b) montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ u.a
(u.a signifie unité d'air)



Partie II Soit g la fonction numérique de la variable réelle x

définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$

1) montrer que $\forall x > 0$, $g'(x) = f(x)$

2) en utilisant 3.c de la partie I, montrer que g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

3.a) que représente la fonction g pour la fonction f ? Justifier la réponse

3.b) en déduire, sans calcul, la valeur de $g(e) - g(1)$. Justifier la réponse