

**Exercice 1 :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \ln(u_n) - \ln(10)$

1. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique
2. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ . Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
3. On pose :  $P_n = \ln\left(\frac{1}{10^{n+1}} \prod_{k=0}^n u_k\right)$ . Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite.

**Exercice 2 :**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}} \right] ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1-x-x^2)}{x} \right] ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x+x^2)]$$

**Exercice 3 :**

- I. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$

Dresser le tableau de variation de  $h$  puis en déduire son signe sur  $]0; +\infty[$

- II. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - 4 + \frac{3 + 2\ln x}{x}$

Et soit  $(C)$ , sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
2. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x - 4$ , est une asymptote à la courbe  $(Cf)$  au voisinage de  $(+\infty)$
3. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $h(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
4. Montrer que  $f''(x) = \frac{4\ln x}{x^3}$ . Puis, étudier la convexité de la courbe  $(Cf)$
5. Tracer la courbe  $(Cf)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
6. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 1[$ 
  - a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer.
  - b. Tracer la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 4 :**

Une société vend une quantité  $Q_1(p)$  d'un produit, au prix de  $p$  DH l'unité tel que  $Q_1(p) = \frac{3}{10}p + 1$

La quantité  $Q_2(p)$  que le client peut acheter est définie par :  $Q_2(p) = -\frac{2}{5}p + 5 + \ln(2p + 6)$

On pose  $Q = Q_1 - Q_2$

1. Montrer que  $Q$  est strictement croissante sur  $[1; 22]$
2. Montrer que l'équation  $Q(p) = 0$  a une unique solution  $p_0$  dans l'intervalle  $[1; 22]$
3. Que représente la quantité  $q_0 = Q_2(p_0)$