

Exercice 1 (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$. (C) est sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le dernier résultat obtenu.

b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$; calculer $f'(-2)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty; +\infty[$.

d) Étudier la concavité de la courbe (C)

2) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[-2, +\infty[$ par la fonction f

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]-4; -3[$

c) Calculer $f(-3.5)$ puis déduire la valeur exacte de α .

d) Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 3x}{x^2 + 1}$

1) a) Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 3$

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) au point d'abscisse 0.

2) a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = 2x + 1 + \frac{x-1}{x^2+1}$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_g) au voisinage de $\pm\infty$.

c) Étudier la position relative de (C_g) et la droite (D).

3) Calculer et réduire l'expression de $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$$

0,75 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1,25 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter géométriquement le dernier résultat.

1,5 2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f .

0,5 b) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1,25 c) Calculer $f(1)$ puis déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2\sqrt{x} \geq \frac{1}{x} + 1$.

0,75 3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera