

Exercice 1 (8 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 6$$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
 b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$
 c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f
 2) a) Déterminer $f([-1; 3])$ et $f([-1; 0])$
 b) Donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes : $f(x) = -2$; $f(x) = 2021$; $f(x) = -1$
 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]5, 6[$
 b) Calculer $f''(x)$ puis déterminer la concavité de la courbe (C_f) en donnant son point d'inflexion I
 c) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ puis écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

Exercice 2 (6 points)

Calculer puis réduire l'expression de $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

- ① $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$; $(x \in \mathbb{R})$; ② $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; $(x \in \mathbb{R})$
 ③ $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{2x+1}$; $(x > -\frac{1}{2})$; ④ $f(x) = (2\sqrt{x} - x)^5$; $(x > 0)$

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $I = [2; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

- 1) a) Montrer que $(\forall x \in I) g(x) = x(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}})$ puis déduire

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x)$

- 0,75 b) Montrer que $(\forall x \in]2, +\infty[) g(x) - g(2) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-2}}$
 c) Étudier la dérivabilité de g à droite en 2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 2) a) Montrer que $(\forall x \in]2, +\infty[) g'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)}$
 0,75 b) Calculer $g'(3)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 0,75 c) Calculer $g(3)$ puis dresser le tableau de variations de g
 0,75 d) Démontrer que $(\forall x \in I) \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \leq \frac{1}{2}$