Benmoussa Mohammed

NOTIONS DE DENOMBREMENT

A. Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini

Définition

$n \in \mathbb{N}^*$; E est un ensemble qui contient n éléments . On dit que E est un ensemble fini .

- Le nombre n s'appelle le cardinal de E on note $\text{card}E = n$ avec $\text{card}\varnothing = 0$

propriétés

$\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}E \cap F$; $\text{card}E \times F = \text{card}E \times \text{card}F$; $E \neq \varnothing$ et $F \neq \varnothing$

$\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$; $A \subset E$ (A est une partie de E) et $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

On a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.

B. Principe fondamental de dénombrement

principe

On considère une expérience comporte p choix (étape) avec $(p \in \{1, 2, 3, ...\})$.

- Si le choix n° 1 se fait avec n_1 manières différentes .
- Si le choix n° 2 se fait avec n_2 manières différentes .
- ………………………………………………………….. .
- Si le choix n° p se fait avec n_p manières différentes .

Alors le nombre total des manières des p choix est $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$

C. Arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments

Définition

Ordonné p éléments avec répétition parmi n éléments (répétition = avec possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments

Propriété

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre n^p

remarque

On représente une arrangement avec répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et …. x_n par :

Numéro du classement (N° d'ordre) →	1	2	3	…..	$p-1$	p
L'élément qui a ce classement (On a le droit de répéter les éléments) →	x_5	x_2	x_7	…..	x_7	x_3

Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)

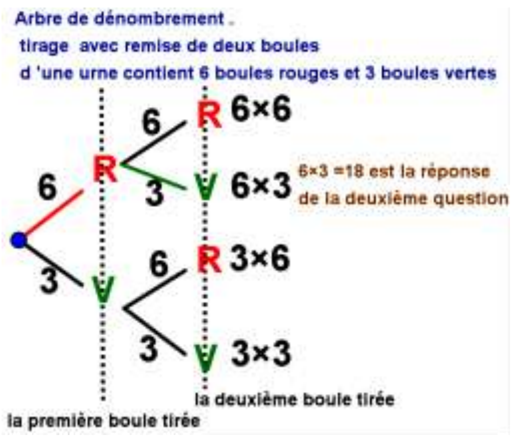
Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et avec remise (càd la boule tiré doit être remettre à l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage avec remise .

Exemple :une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.

Questions :

1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2ième est verte ?

Réponse : 1ère Question. 9^2 ; 2ième Q 6×3



D. Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments

Définition

Ordonné p éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments

Propriété

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$.(avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)

- Le nombre suivant : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$ par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$ on lit :
- factoriel n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec $0! = 1$; $1! = 1$.

Remarques

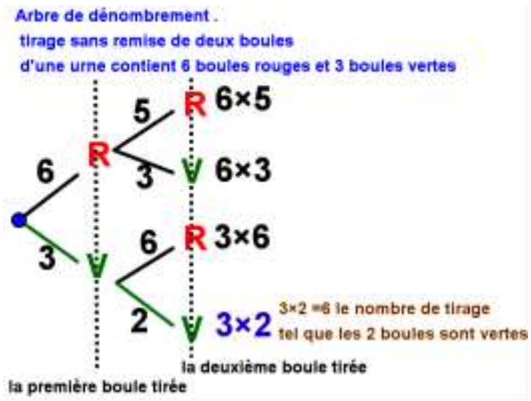
- $A_n^0 = 1$ et $A_n^1 = n$ et $A_n^2 = \underbrace{n(n-1)}_{2}$ et $A_n^3 = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{3}$
- On représente un arrangement sans répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et …. x_n par :

Numéro du classement (N° ordre) →	1	2	3	…..	$p-1$	p
L'élément qui a ce classement (On → obtient un arrangement sans répétition)	x_5	x_2	x_7	…..	x_1	x_3

Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)

Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et sans remise (càd la boule tiré doit être à l'extérieure de l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage sans remise .
Exemple :une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes .
Questions :
1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ?

Réponse :1ère Q. $A_9^2 = 9\times 8$ 2ième Q $A_3^2 = 3\times 2$



E. Permutation de n élément càd : arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments

Définition : Ordonné n éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle permutation de n éléments

Propriété : Le nombre des permutation de n éléments est le nombre $A_n^n = n!$.(avec $n \in \mathbb{N}$)

Remarques

On représente une permutation de n éléments parmi les éléments : x_1 et x_2 et .. x_n par

Numéro du classement →	1	2	3	…..	$n-1$	n
L'élément qui a ce classement → (On obtient une permutation)	x_4	x_2	x_8	…..	x_1	x_{n-3}

F. Combinaison de p éléments parmi n éléments

Définition : E est un ensemble fini ($\text{card}E = n$) toute partie . A de E contient p éléments (avec $(p \le n)$ s'appelle combinaison de p éléments parmi n éléments

Propriété : Le nombre des combinaisons p éléments $(p \in \{0,1,2,3,.....\})$ parmi n éléments est le nombre entier naturel : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)\times p!} = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}^{p}}{1\times 2\times 3\times\cdots\times p}$. (
avec $0 \le p \le n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)

Remarques

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- relation de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et $0 \le p \le n-1$
- binôme de Newton :
  - $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = C_n^0 a^0 b + C_n^0 a^1 b^n + C_n^0 a^2 b^{n-1} + \cdots + C_n^0 a^{n-1} b^1 + C_n^0 a^n b^0$
  - $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^i b^{n-i}$ (car $a+b = b+a$)

G. Expérience aléatoire

Vocabulaire

- Expérience aléatoire : toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire .
- Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 …… ω_n (on général ω_i avec $i \in \{1,2,...;n\}$) .
- Eventualité (ou événement élémentaire) : chaque ω_i s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire .
- Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble s'appelle univers noté $\Omega = \{\omega_1;\omega_2,....,\omega_n\}$.
- Evènement : toute partie A de Ω s'appelle événement .
  - ❖ Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle événement certain .
  - ❖ Si $A = \varnothing$ alors l'évènement $\varnothing$ s'appelle événement impossible .
  - ❖ Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle événement élémentaire .
  - ❖ Si $A \cap B = \varnothing$ on dit que A et B sont deux événements incompatibles
  - ❖ Si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle l'événement contraire de A (vis versa) on note $B = \overline{A}$ (de même $A = \overline{B}$) . remarque $\text{card}A + \text{card}\overline{A} = \text{card}\Omega$
  - ❖ L'événement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réaliser à la fois par les événements A et B .
  - ❖ L'événement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réaliser soit par l'événement A ou par l'événement B .
  - ❖ Les événements A_1 et A_2 et A_3, ….. , A_p est une partition de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = \Omega$.

H. Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

- Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois on a obtenue ω_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$ sans oublier $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n = 1$.
- Probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A on note $p(A)$ (exemple : $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_7\}$ donc $p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_7\})$

Propriétés

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire

- $\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$ et
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

I. Hypothèse d'équiprobabilité

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω) tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = ... = p(\{\omega_n\})$ alors probabilité d'un évènement A de Ω est $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

J. Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - les probabilités composées

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

- Probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ on la note par $p_A(B)$ ou par $p\left(B/A\right)$ donc on a $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$
- A et B sont deux événements indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ ou $p_A(B)=p(B)$
- $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$ l'écriture : $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$ s'appelle la formule du probabilité composée .

K. variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

définitions

Ω est univers d'une expérience aléatoire toute fonction X définie par :

$$X:\ \Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,...,\omega_n\}\to\mathbb{R}$$
$$\omega_i\mapsto X(\omega_i)=x_i$$

S'appelle variable aléatoire définie sur Ω .

Vocabulaire :

- les valeurs x_1 et x_2 et x_3 et ……… et x_p sont appelées les valeurs du variable aléatoire X
- ensembles des valeurs noté par $X(\Omega)=\{x_1,x_2,..,x_p\}$.
- $(X=x_i)=\{\omega\in\Omega / X(\omega)=x_i\}$ donc $(X=x_i)$ présente un événement c.à.d. $(X=x_i)\subset\Omega$.
- L'écriture $p(X=x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X=x_i)$.
- Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X=x_i)$ avec $x_i\in X(\Omega)$
- On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	.....	x_p
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	.....	$p(X=x_p)$

- Le nombre : $\sum_{i=1}^{i=n}x_i\times p(X=x_i)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\cdots+x_n\times p(X=x_n)$

  s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X ; on note $E(X)$.
- Le nombre $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

  $=(x_1)^2\times p(X=x_1)+(x_2)^2\times p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\times p(X=x_n)-[E(X)]^2$

  s'appelle la variance du variable aléatoire X ; on note $V(X)$. remarque $V(X)\geq 0$.
- Le nombre : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type ; du variable aléatoire X . on note $\sigma(X)$

L. Loi binomiale ou distribution binomiale

Loi binomiale ou distribution

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois)

- On répète cette expérience n fois (dont les mêmes conditions de départ)
- On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »
- Ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{0,1,2,...,n\}$
- X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p on note $X=B(n,p)$.

On a : $\forall k\in X(\Omega): p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$, $E(X)=np$, $V(X)=n\times p\times(1-p)$