

Les probabilités

Prof. Smail BOUGUERCH

Terminologie:

Terme de probabilité	Son sens
Expérience aléatoire	Toute expérience qui admet plus d'un résultat
Univers des événements Ω	L'ensemble des événements possibles pour une expérience aléatoire
Événement A	A est une partie de l'univers des événements Ω
Événement élémentaire	Tout événement contenant un seul élément
Réalisation de l'événement $A \cap B$	Si A et B sont réalisés simultanément
Réalisation de l'événement $A \cup B$	Si A et B ou l'un des deux est réalisé
L'événement contraire de A	C'est l'événement \bar{A} ($A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$)
A et B deux événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

Stabilité d'un événement – probabilité d'un événement:

Définition:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- Quand la probabilité d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise sur une valeur p_i , on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est : p_i et on écrit : $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le compose. C'est-à-dire, si $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ est un événement de l'univers Ω , alors la probabilité de l'événement A est : $P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + \dots + P(\{\omega_n\})$

Propriétés:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A de Ω
- Probabilité de l'union de deux événements:
Pour tous événements A et B de Ω
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
➤ Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, on dit que A et B sont incompatibles
- Probabilité de l'événement contraire:
Pour tout événement A de Ω : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Hypothèse d'équiprobabilité:

Définition:

Si tous les événements élémentaires, dans une expérience aléatoire dont l'univers des événements est Ω , sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement A de Ω est : $P(A) = \frac{\text{Card} A}{\text{Card } \Omega}$

Probabilité conditionnelle – indépendance de deux événements:

Définition:

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A) \neq 0$

La probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé est :

$$P_A(B) = P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Résultat:

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A) \times P(B) \neq 0$

On a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$

Définition:

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A$ et B sont deux événements indépendants

Propriété:

Soit Ω un univers d'événements d'une expérience aléatoire, et Ω_1 et Ω_2 deux sous-univers de Ω

($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$)

Pour tout événement A de Ω : $P(A) = p(\Omega_1) \times p(A/\Omega_1) + p(\Omega_2) \times p(A/\Omega_2)$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire

Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X
- Calcul des probabilités $p(X = x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots; n\}$

L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau à côté :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Définitions:

L'espérance mathématique de X

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i$$

La variance de X

$$v(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \times p_i - \left[\sum_{i=1}^n x_i \times p_i \right]^2$$

L'écart type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \times p_i - \left[\sum_{i=1}^n x_i \times p_i \right]^2}$$

La loi binomiale:

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire

On répète cette épreuve n fois de suite

La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

Et on a : $\forall k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; n\}$; $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Et $E(X) = n \times p$

Et $v(X) = n \times p \times (1-p)$