

CHAPITRE III

PROBABILITES

Table des matières

COURS

A) Analyse combinatoire

- 1) Les tirages au sort p 2
- 2) Tirages avec ordre et avec répétition p 3
- 3) Tirages avec ordre et sans répétition p 4
- 4) Tirages sans ordre et sans répétition p 6
- 5) Tirages sans ordre et avec répétition p 8
- 6) Propriétés du nombre C_n^p p 9

B) Lois de probabilité

- 1) Variables aléatoires p 11
- 2) Loi binomiale p 14

EXERCICES p 17

COURS

A) Analyse combinatoire

En classe de 2^e nous avons vu que dans le cas de l'équiprobabilité la probabilité d'un évènement est donné par la formule de Laplace : « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ». Pour appliquer cette formule il faut donc être à même de compter ces cas « favorables » ou « possibles », ce qui devient très vite une tâche assez difficile... Le but de « l'analyse combinatoire » est de développer des techniques de « dénombrement » qui permettent de compter les éléments de certains « grands » ensembles.

1) Les tirages au sort

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des **tirages au sort** de p boules d'une urne qui en contient n.

Exemple

La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier sur les trois premiers ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? »

- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages au sort :
 - **L'ordre**
si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « **tirage avec ordre** », sinon on parle d'un « **tirage sans ordre** ».
 - **La répétition**
si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un **tirage avec répétition ou avec remise**. Dans la cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

- Il y a donc quatre sortes de tirages au sort :
 - Tirages avec ordre et avec répétition (OR)
 - Tirages avec ordre et sans répétition ($\overline{\text{OR}}$)
 - Tirages sans ordre et sans répétition ($\overline{\text{OR}}$)
 - Tirages sans ordre et avec répétition ($\overline{\text{OR}}$)

2) Tirages avec ordre et avec répétition

- Exemple :

Combien de nombres à deux chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?
(en d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient trois numérotées de 1 à 3, avec ordre : 1^{re} boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et avec répétition (ou remise), le chiffre des dizaines et des unités pouvant être le même ?)

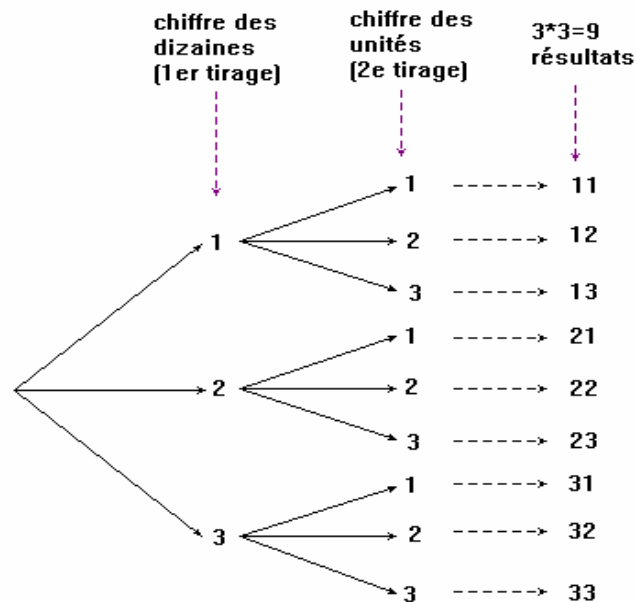
Réponse : 9 nombres : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

Raisonnement :

- pour le chiffre des dizaines on a 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- pour le chiffre des unités on a également 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- au total on a donc $3 \cdot 3 = 9$ possibilités

Justification

Pourquoi $3 \cdot 3 = 9$ et non pas $3 + 3 = 6$ possibilités ? Pour bien comprendre pourquoi dans ce genre de situation il faut multiplier et non pas additionner pour obtenir le total, il faut considérer le **diagramme en arbre** ci-contre :



- Cas général

On fait un tirage OR de p boules d'une urne qui en contient n :

- Nombre de possibilités pour tirer la 1^{re} boule : n
- Nombre de possibilités pour tirer la 2^e boule : n (car remise !)
- \vdots
- Nombre de possibilités pour la p^e boule : n
- Total : $n \cdot n \cdots n = n^p$ (diagramme en arbre !)

- Définition

Un tirage avec ordre et avec remise OR de p objets parmi n est appelé **arrangement à répétition de n objets pris p à p** . Le nombre de ces tirages est noté B_n^p

- Nous venons de montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad B_n^p = n^p$

3) Tirages avec ordre et sans répétition

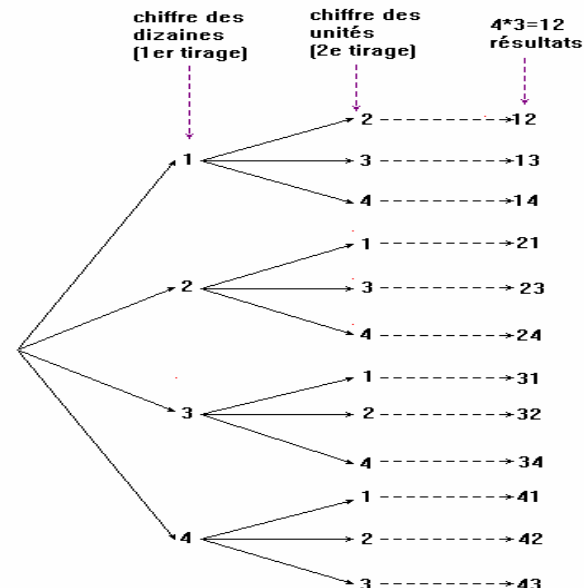
- Exemple :

Combien de nombres à deux chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

(en d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient quatre numérotées de 1 à 4, avec ordre : 1^{re} boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et sans répétition ou remise, les chiffres des dizaines et des unités devant être différents ?)

Raisonnement :

- pour le chiffre des dizaines on a 4 possibilités : 1, 2, 3 ou 4
- pour le chiffre des unités on n'a plus que $4 - 1 = 3$ possibilités puisqu'on ne peut plus tirer la boule qui vient de sortir !
- au total on a donc $4 \cdot 3 = 12$ possibilités



- Cas général

On fait un tirage \overline{OR} de p boules d'une urne qui en contient n . Il est tout d'abord évident que pour qu'un tel tirage existe, il faut que $p \leq n$.

- Nombre de possibilités pour la 1^{re} boule : n
- Nombre de possibilités pour la 2^e boule : $n - 1$ (car pas de remise !)
- Nombre de possibilités pour la 3^e boule : $(n - 1) - 1 = n - 2$
- \vdots
- Nombre de possibilités pour la p^e boule : $n - (p - 1) = n - p + 1$
- Total : $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$ (diagramme en arbre !)

- Définition

Un tirage avec ordre et sans remise \overline{OR} de p objets parmi n est appelé **arrangement de n objets pris p à p** . Le nombre de ces tirages est noté A_n^p

- Nous venons de montrer que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

- Cas particulier : $p = n$

Un tel tirage (on tire toutes les boules de l'urne dans un certain ordre) revient à *ranger les n boules de l'urne dans un certain ordre* : on dit qu'on a fait une **permutation** des n objets de l'urne et $A_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

- Définition

Le nombre $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (pour $n \geq 2$) est appelé **factorielle n** et est noté **$n!$** . Pour des raisons exposées plus bas on pose : $0! = 1! = 1$, d'où :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ \prod_{i=1}^n i & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Exemples

- $5! = 120$; $10! = 3\,628\,800$; $50! \approx 3,041409 \cdot 10^{64}$; $100! \approx 9,332622 \cdot 10^{157}$

- Il y a 25 ! possibilités pour placer 25 personnes sur 25 chaises. En supposant qu'un ordinateur très puissant « réalise » 100 milliards (10^{11}) de tels placements *par seconde*, il aurait besoin pour finir son travail de :

$$\frac{25!}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25 \cdot 10^{11}} \approx 4915'206 \text{ années !}$$

- Autre notation pour A_n^p :

- pour $p < n-1$: $A_n^p = \frac{n \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!} (*)$
- $A_n^{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-1)+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Donc la formule (*) marche pour $p = n-1$ si et seulement si :

$$\frac{n!}{(n-(n-1))!} = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{1!} = n! \Leftrightarrow 1! = 1$$

- $A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Donc la formule (*) marche pour $p = n$ si et seulement si :

$$\frac{n!}{(n-n)!} = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{0!} = n! \Leftrightarrow 0! = 1$$

- Ainsi on a posé $0! = 1! = 1$ pour pouvoir écrire:

$$\boxed{\forall p \leq n \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

4) Tirages sans ordre et sans répétition

- Exemple : le loto

On tire 6 boules d'une urne qui en contient 49 (numérotées de 1 à 49) sans considérer l'ordre dans lequel elles ont été tirées et sans remise (on ne peut pas tirer deux fois le même nombre).

Soit x le nombre de tirages possibles : à chacun de ces tirages (p.ex. 5 – 43 – 17 – 28 – 31 – 35) on peut associer 6 ! tirages *avec ordre* (en permutant ces 6 éléments), donc $x \cdot 6! = A_{49}^6 \Leftrightarrow x = \frac{A_{49}^6}{6!} \Leftrightarrow x = \frac{49!}{43!6!}$. Ainsi il y a 13983816

façons de remplir une grille de loto !



- **Cas général**

Soit x le nombre de tirages \overline{OR} de p boules d'une urne qui en contient n (avec $p \leq n$). En permutant les p boules d'un tel tirage, on obtient $p!$ tirages \overline{OR} . D'où :

$$x \cdot p! = A_n^p \Leftrightarrow x = \frac{A_n^p}{p!} \Leftrightarrow x = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

- **Définition**

Un tirage sans ordre et sans remise \overline{OR} de p objets parmi n (avec $p \leq n$) est appelé **combinaison (sans répétition) de n objets pris p à p** . Le nombre de ces

tirages est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

- Nous venons de montrer que : $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- Si $p > n$ il n'y a aucune possibilité de tirer p objets parmi n sans répétition, donc on pose : $\forall p > n \quad C_n^p = 0$.
- Dans l'énumération des éléments d'un ensemble l'ordre ne joue pas de rôle donc un tirage \overline{OR} peut être considéré comme un sous-ensemble de p éléments d'un ensemble de cardinal n . Par conséquent :

$$C_n^p = \text{nombre de sous-ensembles de } p \text{ éléments d'un ensemble à } n \text{ éléments}$$

- **Exemples :**

$$C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10, \quad C_9^4 = \frac{9!}{5!4!} = 126, \quad C_{17}^1 = \frac{17!}{16!1!} = 17, \quad C_{39}^0 = \frac{39!}{39!0!} = 1, \text{ etc.}$$

5) Tirages sans ordre et avec répétition (*hors programme*)

- Exemple

On choisit 6 entiers parmi 4 entiers a, b, c et d et on fait leur somme. Combien de résultats *différents* peut-on ainsi obtenir *au plus* (si on choisit p.ex. a = 1, b = 10, c = 100 et d = 1000 toutes les sommes calculées sont différentes, mais on vérifie facilement que pour d'autres choix, p.ex. a = 1, b = 2, c = 3 et d = 4, certaines sommes sont égales !) ?

Comme l'ordre des termes d'une somme ne joue aucun rôle, ceci revient à compter le nombre de tirages $\overline{\text{OR}}$ de 6 nombres parmi les entiers a, b, c et d. Dans un tel tirage, la seule chose qui importe est le nombre de fois que chacun de ces entiers a été tiré. On peut donc représenter ces tirages de la manière suivante :

$$u_1 | u_2 | u_3 | u_4$$

où u_1 (respectivement u_2 , u_3 et u_4) est le nombre de fois que l'entier a

(respectivement b, c et d) est tiré, avec $\sum_{i=1}^4 u_i = 6$.

Ou encore : $\underbrace{00\dots0}_{u_1 \text{ "0"}} | \underbrace{00\dots0}_{u_2 \text{ "0"}} | \underbrace{00\dots0}_{u_3 \text{ "0"}} | \underbrace{00\dots0}_{u_4 \text{ "0"}}$, autrement dit un tirage peut être

représenté par une suite dans un certain ordre de 6 « 0 » et de $4-1=3$ « | ». Par exemple 000||0|00 signifie qu'on a tiré 3 fois le a, aucune fois le b, 1 fois le c et 2 fois le d. Dans une telle suite de $6+3=9$ symboles il faut choisir 6 places pour mettre les « 0 » (les 3 places restantes sont occupées par des « | »), c'est-à-dire dans l'ensemble des 9 places disponibles il faut choisir un sous-ensemble de 6 places pour mettre les « 0 », ce qui peut se faire de $C_9^6 = \frac{9!}{3!6!} = 84$ manières différentes.

- Cas général

Désignons par D_n^p le nombre de tirages $\overline{\text{OR}}$ de p objets parmi n. D'après ce qui précède, un tel tirage peut être représenté par une suite de p « 0 » et de $n-1$ « | », donc D_n^p est égal au nombre de sous-ensembles de p éléments (les p places pour les « 0 ») d'un ensemble de $n-1+p$ éléments (puisque en tout il y a $n-1+p$ symboles dans une suite), d'où :

$$D_n^p = C_{n+p-1}^p$$

6) Propriétés du nombre C_n^p

a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^0 = C_n^n = 1}$

En effet $C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$ et $C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{0!1} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$.

On aurait pu dire aussi qu'un ensemble de n éléments a 1 sous-ensemble de 0 élément (l'ensemble vide) et 1 sous-ensemble de n éléments (l'ensemble lui-même !).

b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

En effet $C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!1} = n$ et $C_n^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

c) $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_n^p = C_n^{n-p}}$

En effet $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_n^{n-p}$

p.ex. $C_5^3 = C_5^2$, $C_{17}^6 = C_{17}^{11}$, etc.

d) Triangle de Pascal

(Blaise Pascal, mathématicien, physicien, philosophe et théologien, 1623-1662, un des initiateurs du calcul des probabilités)

• $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p} \quad (*)$

démonstration :

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(n-p)!(p-1)!p} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)(n-1-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)! [p + (n-p)]}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p \end{aligned}$$

- Dressons un tableau avec les valeurs des C_n^p :
 - Les lignes et les colonnes sont numérotées :0, 1, 2, 3, etc.
 - C_n^p se trouve à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne
 - d'après la propriété a) la première colonne et la diagonale du tableau seront remplies de « 1 »
 - au-dessus de la diagonale il n'y a que des 0 car si $p > n$ $C_n^p = 0$, ce qui donne une forme « triangulaire » à ce tableau
 - pour les autres valeurs on utilise la formule (*) pour calculer progressivement :

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2, \quad C_3^1 = 1 + 2 = 3, \quad C_3^2 = 2 + 1 = 3, \quad C_4^1 = 1 + 3 = 4,$$

$$C_4^2 = 3 + 3 = 6, \quad C_4^3 = 3 + 1 = 4, \quad C_5^1 = 1 + 4 = 5, \quad C_5^2 = 4 + 6 = 10, \text{ etc}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exercices 1 – 26

e) **Binôme de Newton**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors nous savons que :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

et nous constatons que les coefficients des expressions des membres droits de ces égalités sont les nombres des 3^e et 4^e lignes du triangle de Pascal :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 \text{ et } (a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

Formulons l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^i a^{n-i} b^i + \dots + C_n^n a^0 b^n \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i \end{aligned}} \quad (*)$$

et démontrons-la *par récurrence* :

pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$ donc (*) est bien vérifiée !

supposons que (*) est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle l'est aussi pour $n+1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= (C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^i a^{n-i} b^i + \dots + C_n^n a^0 b^n) (a+b) \\ &= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^n a^1 b^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \dots + (C_n^n + C_n^{n-1}) a b^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\ &\stackrel{!}{=} C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} \end{aligned}$$

La formule (*) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous les réels a et b : elle est appelée **formule du binôme de Newton**.

Exercices 27 – 35

B) Lois de probabilité

1) Variables aléatoires

- Soit Ω l'ensemble des éventualités liées à une expérience aléatoire et $p : \Omega \rightarrow [0,1]$ la probabilité associée à cette expérience.

Exemple

Un dé est jeté deux fois de suite :

$\Omega = \{(x, y) / x \text{ est le résultat du 1er jet et } y \text{ celui du 2e jet}\}$, $\#\Omega = 6^2 = 36$ et p est

l'équiprobabilité : $\forall (x, y) \in \Omega \quad p((x, y)) = \frac{1}{36}$

- Il arrive alors souvent qu'on associe à chaque élément de Ω un certain nombre réel par une application appelée **variable aléatoire** et notée X, Y, Z, \dots

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemples

En reprenant l'exemple précédent on peut, par exemple :

- s'intéresser à la *somme* des deux résultats obtenus :

$$X : \Omega \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \text{ avec } \forall (x, y) \in \Omega \quad X((x, y)) = x + y$$

- faire un *jeu* : si j'obtiens deux fois le même résultat je gagne 10 €, sinon je perds 1 €.

$$Y : \Omega \rightarrow \{10, -1\} \text{ avec } \forall (x, y) \in \Omega \quad Y((x, y)) = \begin{cases} 10 & \text{si } x = y \\ -1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

- Comme nous ne considérons que les Ω finis dans ce cours, une variable aléatoire ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs que nous noterons x_i . La probabilité qu'une variable aléatoire X prenne la valeur x_i sera notée $p(X = x_i) = p_i$. En calculant p_i pour toutes les valeurs x_i possibles, on définit **la loi de probabilité de la variable aléatoire X** .

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

- pour la v.a. X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Il suffit de regarder pour combien d'éventualités chaque somme x_i est obtenue.

- pour la v.a. Y :

x_i	10	-1
p_i	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

- En dessinant les points de coordonnées (x_i, p_i) dans un repère orthogonal et en reliant ces points par des segments, on obtient le **polygone de probabilité** de X.
- **Rappel : Moyenne arithmétique pondérée**

○ *Exemple*

Marie a eu 43 en mathématiques, 38 en français et 51 en géographie. Calculez sa note moyenne sachant que ces notes sont « pondérées » par les coefficients 4 pour les mathématiques, 3 pour le français et 2 pour la géographie.

$$\text{moyenne} = \frac{4 \cdot 43 + 3 \cdot 38 + 2 \cdot 51}{4 + 3 + 2} = \frac{4}{9} \cdot 43 + \frac{3}{9} \cdot 38 + \frac{2}{9} \cdot 51 \approx 43,1$$

En notant $x_1 = 43$, $p_1 = \frac{4}{9}$, $x_2 = 38$, $p_2 = \frac{3}{9}$, $x_3 = 51$ et $p_3 = \frac{2}{9}$, on a :

$$\text{moyenne} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 = \sum_{i=1}^3 p_i \cdot x_i \text{ avec } \sum_{i=1}^3 p_i = 1 \text{ et } \forall i \ 0 \leq p_i \leq 1.$$

○ *Cas général*

Soient $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ n nombres réels quelconques et $(p_i)_{i=1,2,\dots,n}$ n nombres réels

compris entre 0 et 1 et dont la somme vaut 1 : $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Alors on appelle

moyenne arithmétique pondérée des nombres $(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ le nombre \bar{x} défini

$$\text{par : } \bar{x} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$$

- On appelle **espérance mathématique** de la v. a. X le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

D'après ce qui précède ce nombre $E(X)$ est la moyenne arithmétique *pondérée* des valeurs x_i , chaque x_i étant pondéré par sa probabilité p_i . L'espérance mathématique peut donc être interprétée comme **la moyenne arithmétique des valeurs x_i si on répétait l'expérience une infinité de fois !**

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

○ $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 12 \cdot 1}{36} = \frac{252}{36} = 7$, ce qui

signifie que si on répétait l'expérience une infinité de fois on obtiendrait en moyenne une somme de 7.

- $E(Y) = 10 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$, ce qui veut dire qu'en moyenne (en jouant un très grand nombre de fois) on gagne $\frac{5}{6}$ € par « partie ».

- Si X est un **jeu** et :
 - $E(X) > 0$, on dit que ce jeu est **favorable** (au joueur).
 - $E(X) < 0$, on dit que ce jeu est **défavorable** (au joueur).
 - $E(X) = 0$, on dit que ce jeu est **équilibré**.
- On appelle **variance** de la v. a. X le nombre $v(X)$ défini par :

$$v(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$$

C'est la moyenne pondérée des *carrés* des écarts des x_i par rapport à $E(X)$. Le fait de prendre les carrés de ces écarts tend à donner plus d'importance aux grands écarts et de minimiser l'importance des petits écarts. La *dispersion* des valeurs x_i autour de $E(X)$ est alors mesurée par un nombre appelé **écart type** défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$$

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

- $v(X) = \frac{1}{36}(2-7)^2 + \frac{2}{36}(3-7)^2 + \dots + \frac{1}{36}(12-7)^2 = \frac{35}{6}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$
- $v(Y) = \frac{1}{6}\left(10 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(-1 - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{605}{36}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{605}{36}} \approx 4,10$

2) Loi binomiale

- Une **épreuve de Bernoulli** (*famille de mathématiciens suisses du 18^e siècle*) est une expérience aléatoire qui
 - n'a que **deux résultats possibles** qu'on convient d'appeler « succès » et « échec »
 - qu'on peut répéter indéfiniment dans les **mêmes conditions**

On note **p** la probabilité du succès et **q** = 1 - p la probabilité de l'échec.

• Exemples

- On joue à « pile ou face » et on définit soit pile soit face comme un « succès », alors $p = q = \frac{1}{2}$
- On jette un dé non truqué et on définit le résultat « 6 » comme « succès », tout autre résultat comme « échec », alors $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$

- En répétant une telle expérience n fois on a :

$$\Omega = \{(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) / u_i = \text{succès ou échec}\}$$

On appelle **loi binomiale** la loi de probabilité de la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

telle que $X((u_1, u_2, \dots, u_n)) = \text{nombre de succès dans } (u_1, u_2, \dots, u_n)$

- Calcul de $p_i = p(X = i)$ pour $0 \leq i \leq n$:

- Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Omega$ telle que $X((u_1, u_2, \dots, u_n)) = i$, c'est-à-dire une éventualité qui compte i « succès » et $n - i$ « échecs ». Cette éventualité peut être considérée comme l'intersection des n évènements définis par :

$$A_j : \text{"obtenir } u_j \text{ à la } j^{\text{e}} \text{ épreuve"} \text{ avec } p(A_j) = \begin{cases} p & \text{si } u_j \text{ est un succès} \\ q & \text{si } u_j \text{ est un échec} \end{cases}$$

Comme ces n évènements sont indépendants, on a :

$$p((u_1, u_2, \dots, u_n)) = p\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n p(A_j) = p^i q^{n-i}$$

- Or il y a C_n^i possibilités pour choisir i « emplacements » pour les « succès », les « emplacements » restants étant réservés pour les $n - i$ « échecs ».

- D'où : $\forall i \leq n \quad p_i = p(X = i) = C_n^i p^i q^{n-i} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

- Remarque :

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} = (p + q)^n = 1^n = 1 \text{ (d'après la formule du binôme de Newton)}$$

- Exemples (reprise des deux exemples précédents)

- En jouant 30 fois à « pile ou face » la probabilité d'obtenir 10 fois « face »

$$\text{vaut : } p(X = 10) = C_{30}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = C_{30}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \approx 0,0280$$

- En jetant 30 fois un dé non truqué la probabilité d'obtenir 10 fois un « 6 »

$$\text{vaut : } p(X=10) = C_{30}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{20} = C_{30}^{10} \frac{5^{20}}{6^{30}} \approx 0,0130$$

- Calculons [l'espérance mathématique d'une loi binomiale](#) :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n i \cdot p_i = \sum_{i=1}^n i \cdot p_i = \sum_{i=1}^n i \cdot C_n^i p^i q^{n-i}, \text{ or pour tout } i \geq 1 \text{ on a :}$$

$$i \cdot C_n^i = i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n \cdot C_{n-1}^{i-1}, \text{ d'où :}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n n \cdot C_{n-1}^{i-1} p^i q^{n-i} = np \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i}, \text{ et en posant } k = i-1 \text{ il vient :}$$

$$E(X) = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = np (p+q)^{n-1} = np 1^{n-1} = np, \text{ d'où :}$$

$$E(X) = np$$

- *Exemples (reprise des deux exemples précédents)*

- En jouant 30 fois à « pile ou face » $E(X) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$

- En jetant 30 fois un dé non truqué $E(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$

- Calculons [la variance mathématique d'une loi binomiale](#) :

$$\begin{aligned} v(X) &= \sum_{i=0}^n p_i (i - E(X))^2 = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} (i - np)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot i^2 - 2np \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot i + n^2 p^2 \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} \\ &= \sum_{i=1}^n i \cdot i \cdot C_n^i p^i q^{n-i} - 2np \cdot E(X) + n^2 p^2 (p+q)^n \\ &= \sum_{i=1}^n i \cdot n \cdot C_{n-1}^{i-1} p^i q^{n-i} - 2np \cdot np + n^2 p^2 \cdot 1^n \\ &= np \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i} - 2n^2 p^2 + n^2 p^2 \\ &= np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} - n^2 p^2 \quad (\text{en posant } k = i-1) \\ &= np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} + np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} - n^2 p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= np \cdot (n-1)p + np \cdot (p+q)^{n-1} - n^2 p^2 \\ &= n^2 p^2 - np \cdot p + np \cdot 1 - n^2 p^2 \\ &= np(np - p + 1 - np) \\ &= np(1-p) \\ &= npq \end{aligned}$$

- Exemples (reprise des deux exemples précédents)
 - $v(X) = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 7,5$ et $\sigma(X) = \sqrt{7,5} \approx 2,74$
 - $v(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6} \approx 4,17$ et $\sigma(X) = \sqrt{4,17} \approx 2,04$
- **Formulaire pour la loi binomiale :**

$$\begin{aligned} \forall i \leq n \quad p_i &= p(X=i) = C_n^i p^i q^{n-i} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \\ E(X) &= np \\ v(X) &= npq \\ \sigma(X) &= \sqrt{npq} \end{aligned}$$

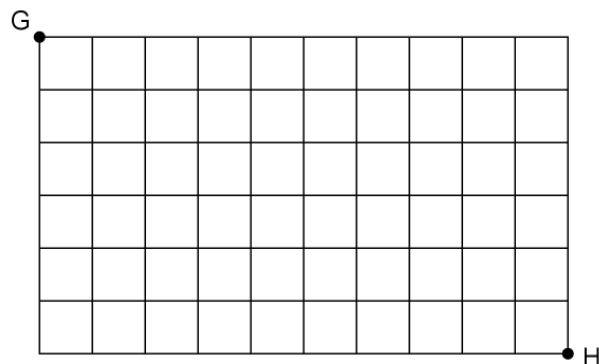
Exercices 36 – 50

EXERCICES

- 1) Avec les chiffres de 0 à 9, combien peut-on former de nombres à 6 chiffres (le premier chiffre étant bien sûr différent de 0) :
 - a) si on admet que ces nombres peuvent contenir plusieurs fois le même chiffre ?
 - b) si on veut que les 6 chiffres d'un de ces nombres soient 2 à 2 différents ?
- 2) Combien de plaques d'immatriculation pour les voitures a-t-on si chaque plaque
 - a) est constituée de 2 lettres suivies de 3 chiffres ?
 - b) est constituée de 2 lettres suivies de 4 chiffres ?
 - c) est constituée de 2 lettres et de 3 chiffres dans un ordre quelconque ?
- 3) Combien y a-t-il de nombres à 4 chiffres tel que le chiffre des milliers soit impair, le chiffre des centaines strictement inférieur à 7, le chiffre des dizaines pair et le chiffre des unités supérieur ou égal à 4 ?

- 4) Un lycée de 1200 élèves (640 filles et 560 garçons) et de 180 professeurs (72 femmes et 108 hommes) veut se doter d'un conseil de 10 membres, 5 élèves et 5 professeurs. De combien de façons peut-on procéder si
- a) on n'impose pas de condition particulière ?
 - b) on veut que le conseil ait autant de membres masculins que féminins ?
 - c) on veut que le conseil ait au moins 4 filles et au moins 4 membres masculins ?
- 5) De combien de façons peut-on tirer une main de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant
- a) 1 roi, 1 dame et 2 valets?
 - b) 3 cartes noires ?
 - c) au moins 1 trèfle?
 - d) 2 dames et 2 cœurs ?
 - e) une carte de chaque couleur ?
 - f) 4 cartes de même valeur ?
 - g) au moins 1 roi et au plus 3 as ?
 - h) au moins 1 roi et au plus 2 as ?
 - i) des cartes de deux couleurs différentes ?
 - j) des cartes de trois valeurs différentes ?
- 6) De combien de manières peut-on choisir 2 délégués de nationalités différentes parmi 4 belges, 6 français et 8 anglais ?
- 7) De combien de manières une société de 10 membres peut-elle choisir un groupe de 3 personnes pour effectuer un voyage culturel
- a) si Madame Gamma refuse de partir avec Monsieur Zète ?
 - b) si Mlle Alpha et M. Bêta n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensemble ?
 - c) si on est soumis aux deux contraintes précédentes à la fois ?
 - d) mêmes questions si on veut constituer un groupe de 4 personnes pour le voyage.
- 8) P. a 5 livres d'algèbre, 3 livres de géométrie et 4 livres d'analyse.
- a) De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère de sa bibliothèque ?
 - b) Même question en les regroupant par sujet.
- 9) De combien de façons peut-on ranger 5 boules dans 7 cases ...
- a) si les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
 - b) si les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

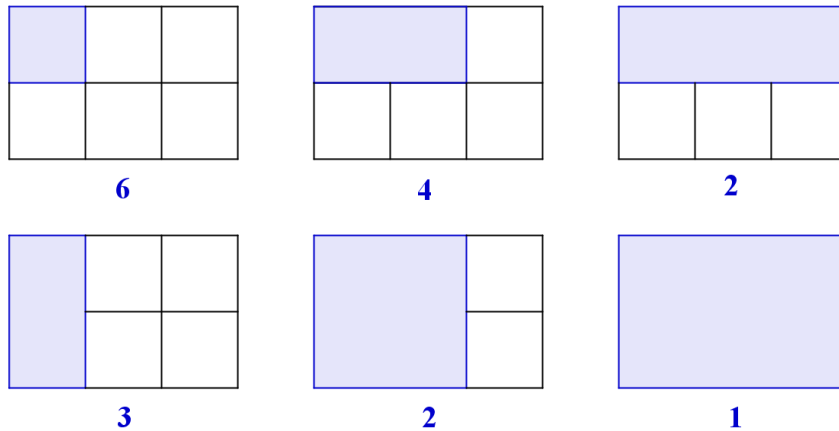
- c) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
 - d) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
- 10) Voici le plan d'une ville américaine, G étant la gare et H un hôtel :



Chaque bloc est un carré de 100 m sur 100 m. Quelle est la longueur minimale d'un trajet qui va de la gare à l'hôtel indiqué ? Comment faut-il se déplacer sur ce quadrillage si on ne veut pas dépasser cette longueur minimale ? Combien de trajets différents y a-t-il pour aller de la gare à l'hôtel sans faire de détour ?

- 11) De combien de façons peut-on dédoubler une classe de 30 élèves ...
- a) en deux classes de 15 élèves ?
 - b) en deux classes de 15 élèves sachant que l'une aura M. Hicks comme titulaire tandis que la titulaire de l'autre sera Mme Ygraic ?
 - c) mêmes questions si on veut faire 3 classes de 10 élèves.
- 12) Avec les 9 chiffres distincts de 0, combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres différents ...
- a) qui se terminent par 7 ?
 - b) qui se terminent par 23 ?
 - c) qui comprennent 4 ?
 - d) qui ne comprennent pas 9 ?
 - e) qui ne comprennent que des chiffres impairs ?
 - f) qui comprennent 5 mais pas 6 ?
 - g) qui comprennent 2 et 5 sous la forme 25 ? (*p.ex. 72518, mais pas 72158*)
 - h) qui comprennent 2 et 5 dans cet ordre ? (*p.ex. 924751, mais pas 954721*)
 - i) qui comprennent 2 et 5 dans un ordre quelconque ?
 - j) dont deux sont pairs et trois impairs ?

- 13) Il y a $6+4+2+3+2+1=18$ rectangles possibles sur un damier de dimensions 2×3 :



Combien y en a-t-il sur un damier $m \times n$?

- 14) Au poker on dispose d'un jeu de 32 cartes (4 **couleurs** : cœurs, carreaux, trèfles et piques et 8 **valeurs** : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7). Calculez la probabilité d'obtenir une main de 5 cartes formant :
- a) un full (3 cartes d'une valeur et 2 autres d'une autre valeur, *p.ex. 3 as et 2 valets*)
 - b) une quinte floche (5 cartes consécutives d'une même couleur, *p.ex. 8, 9, 10, valet, dame, tous carreaux*)
 - c) une couleur (5 cartes non consécutives d'une même couleur, *p.ex. 7, 9, 10, valet, as, tous carreaux*)
 - d) une quinte (5 cartes consécutives qui ne sont pas d'une même couleur, *p.ex. 8 de trèfle, 9 de carreau, 10 de pique, valet de pique, dame de cœur*)
 - e) un carré (4 cartes d'une même valeur et une autre, *p.ex. 4 as et un 10*)
- 15) D'un jeu de 32 cartes on tire simultanément 2 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :
- a) 2 cartes rouges ?
 - b) 2 piques ?
 - c) 2 cartes de même couleur (parmi les 4 couleurs) ?
 - d) 1 roi et 1 neuf ?
 - e) 2 cartes de valeurs différentes ?
 - f) 1 valet et 1 trèfle exactement ?
 - g) 1 roi ou 1 pique ?
- 16) Reprenez les questions de l'exercice précédent si on tire successivement 2 cartes en tenant compte de l'ordre du tirage,
- a) sans remise.
 - b) avec remise de la première carte avant de tirer la deuxième.

- 17) On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculez la probabilité qu'il ait dans sa main :
- a) 5 piques, 3 trèfles, 4 carreaux et 1 cœur.
 - b) Au moins 2 cœurs ?
 - c) Au plus 3 rois ?
 - d) Au moins 1 as et 1 sept?
- 18) Une commission européenne est formée de 20 membres : 12 allemands, 6 polonais et 2 hongrois. En en choisissant 2 au hasard, quelle est la probabilité qu'ils aient la même nationalité ?
- 19) Dans un village il y a 6 bistrot. Six villageois décident, sans se concerter, de passer la soirée dans un des 6 bistrot.
- a) Quelle est la probabilité pour que les six personnes aient choisi le même bistrot ?
 - b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient choisi le même établissement ?
- 20) Pour l'examen oral de géographie, le professeur a réalisé 60 fiches proposant chacune un paragraphe de la matière à réviser. Chaque élève doit en tirer 4 au hasard. Sachant que P. n'a révisé qu'un tiers du programme, quelle est la probabilité pour qu'il :
- a) connaisse les 4 sujets tirés ?
 - b) ne connaisse aucun des 4 sujets tirés ?
 - c) connaisse 3 des 4 sujets tirés ?
 - d) rate son examen ?
- 21) On lance 5 pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :
- a) exactement 3 faces ?
 - b) au moins 3 faces ?
- 22) Dans un sac il y a 9 boules numérotées de 1 à 9. Calculez la probabilité de tirer
- a) deux boules impaires
 - i) simultanément
 - ii) successivement (sans remise)
 - b) une paire et une impaire
 - i) simultanément
 - ii) successivement (sans remise)
- 23) On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir :
- a) 1 boule de chaque couleur ?

- b) 3 boules de même couleur ?
- c) 2 boules rouges et 1 boule d'une autre couleur ?
- d) au moins 2 boules noires ?
- 24) Jouer au loto consiste à choisir 6 numéros parmi 49. Calculez la probabilité d'avoir :
- a) les 6 bons numéros.
- b) 5 bons numéros et le numéro complémentaire.
- c) 5 bons numéros.
- d) 4 bons numéros.
- e) 3 bons numéros.
- 25) Une tombola comprend 1000 billets pour 2 lots gagnants. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité de gagner soit supérieure à 0,5 ?
- 26) Ecrivez plus simplement :
- a) $71! \cdot 72$
- b) $\frac{84!}{84}$
- c) $(n+1)n!$
- d) $\frac{(n+3)!}{(n+1)(n+2)}$
- e) $\frac{100!}{99!}$
- f) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
- 27) Développez les binômes suivants :
- a) $(a+b)^7$
- b) $(2x+3y)^4$
- c) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$
- d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x^2}{2}\right)^6$
- e) $(a-2b)^5$
- f) $\left(x^3\sqrt{2} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right)^4$

- 28) Quelle est la somme des coefficients des développements de $(x + y)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$?
- 29) Soit E un ensemble de n éléments, où $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à 0, 1, 2, 3, p éléments ?
 - b) Notons $\wp(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Calculez le cardinal de cet ensemble.
 - c) Retrouvez ce résultat en utilisant un tirage au sort bien choisi.
- 30) Calculez le terme en ...
- a) x^6 dans $(3x^2 - 2)^{10}$
 - b) x dans $\left(2x^2 - \frac{4}{x}\right)^5$
 - c) x^{16} dans $x^{10}(x + 7)^8$
 - d) t^3 dans $\left(3t + \frac{1}{t^2}\right)^{12}$
- 31) Calculez le(s) terme(s) milieu(x) dans le développement de :
- a) $(3x + 2)^{12}$
 - b) $\left(4k^2 - \frac{3}{k}\right)^{11}$
 - c) $\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7$
- 32) Démontrez (et complétez celles qui sont incomplètes) les formules suivantes où $n, p \in \mathbb{N}^*$:
- a) $C_n^p = \dots C_{n-1}^{p-1}$
 - b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = \dots$
 - c) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} + \dots + C_{n-p+1}^1 + C_{n-p}^0$
 - d) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$
 - e) $\frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \dots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$
 - f) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$
 - g) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = \dots$
 - h) $\sum_{i=0}^n iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \dots$ (avec $p \in \mathbb{R}$)

33) Calcule n sachant que $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 - 387n = 0$

34) a) Démontrez les **formules d'Euler** suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \frac{\operatorname{cis}(x) + \operatorname{cis}(-x)}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \frac{\operatorname{cis}(x) - \operatorname{cis}(-x)}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (2)$$

b) Appliquez ces formules pour **linéariser** (c-à-d exprimer sans exposant) $\cos^n x$ et $\sin^n x$ pour $n=2, 3, 4, 5$.

35) Pour chacune des expressions suivantes :

- développez en vous servant de la formule du binôme de Newton
- calculez en vous servant de la formule de Moivre
- comparez les résultats

a) $(1+i)^5$

b) $(1-i)^6$

c) $(1+i\sqrt{3})^4$

d) $(\sqrt{3}-i)^5$

36) Dans le jeu de « pile ou face » on gagne 1 € si on obtient « pile » et on perd 2 € si on obtient « face ». Choisissez une variable aléatoire X et calculez $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

37) Dans une urne il y a 12 boules noires et 8 boules blanches. Si on tire une boule blanche on gagne 5 €, si on tire une boule noire on perd 3 €. Choisissez une variable aléatoire X et calculez $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

38) On jette un dé non truqué et on gagne 5 € si on obtient le 6, 2 € si on obtient le 4 ou le 5, on perd 3 € si on obtient le 2 ou le 3, et 4 € si on obtient le 1. La variable aléatoire X est définie par le gain du joueur. Calculez la loi de probabilités de X , $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ et dessinez le polygone de probabilités de X . Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Combien devrait-il gagner en obtenant le 6 pour que le jeu soit équilibré ?

39) On jette un dé et si le nombre qui sort est premier, on gagne autant d'euros, sinon on perd le nombre d'euros indiqué par le dé. Choisissez une variable aléatoire X et calculez $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Aimeriez-vous jouer à ce jeu ? Faites une proposition pour changer (aussi peu que possible !) la règle de ce jeu afin qu'il soit bien équilibré !

- 40) On tire au hasard un échantillon de 3 articles d'une boîte qui contient 30 articles, dont 7 sont défectueux. Calculez l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux auquel on peut s'attendre.
- 41) Un joueur lance une pièce non truquée n fois de suite. Il gagne s'il obtient pile p fois. Quelle est la probabilité qu'il gagne
- a) si $n = 4$ et $p = 1$?
 - b) si $n = 8$ et $p = 2$?
 - c) si $n = 12$ et $p = 3$?
- 42) Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules noires.
- a) On tire deux boules avec remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?
 - b) On tire 20 boules avec remise
 - i) Quelle est la probabilité de tirer autant de noires que de blanches ?
 - ii) Quelle est la probabilité de tirer 7 boules noires ?
 - iii) Quelle est la probabilité de tirer au plus 5 boules blanches ?
- 43) Lors d'un examen un étudiant se voit proposer 10 questions à choix multiple : 4 réponses par question, dont une seule correcte. L'étudiant, qui ne s'est pas du tout préparé pour l'examen, choisit les réponses entièrement au hasard.
- a) Quel résultat peut-il raisonnablement (mathématiquement) espérer ?
 - b) Quelle est sa probabilité de réussite (au moins 5 sur 10) ?
- 44) Une pièce est lancée 6 fois de suite et on choisit la variable aléatoire X : nombre de « face ».
- a) Déterminez la loi de probabilités de X .
 - b) Calculez $p(X < 3)$.
 - c) Quel est le nombre de « pile » espéré ?
 - d) Calculez $v(X)$ et $\sigma(X)$.
- 45) Un tireur atteint une cible avec une probabilité de $1/3$.
- a) S'il tire 6 fois, quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 3 fois ?
 - b) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure à 0,999 999 ?
- 46) La probabilité d'obtenir « pile » avec une certaine pièce mal équilibrée est de $1/3$. On jette cette pièce 4 fois et on considère la variable aléatoire X : plus grand nombre de « pile » successifs. Calculez l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

- 47) Deux dés sont jetés simultanément. La variable aléatoire X est la différence positive des chiffres obtenus par les deux dés.
- a) Déterminez la loi de probabilités de X .
 - b) Tracez le polygone de probabilités.
- 48) On considère un lot de pièces dont 10% sont défectueuses. On choisit un échantillon de 100 pièces. Quelle est la probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 10 pièces défectueuses ?
- 49) On suppose qu'il y a équiprobabilité d'obtenir une fille ou un garçon.
- a) Quel est le nombre moyen de filles dans une famille de 10 enfants ?
 - b) Quelle est la probabilité pour qu'une famille de 10 enfants ait :
 - un nombre de filles égal à cette moyenne ?
 - exactement 3 garçons ?
 - au moins 2 filles ?
- 50) Un aquarium contient 6 poissons rouges à 1,5 € la pièce et 4 poissons jaunes à 2 € la pièce. Un client achète 3 poissons qu'il sort au hasard de cet aquarium. La variable aléatoire X désigne le prix à payer pour les 3 poissons.
- a) Etablissez la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b) Calculez le prix moyen $E(X)$.
 - c) Calculez l'écart-type du prix payé.