Le dénombrement

Prof. Smail BOUGUERCH

Cardinal d'un ensemble:

Définition:

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : $CardE$

Cas particulier: $Card\varnothing = 0$

Propriété:

A et B sont deux ensembles finis

$Card\left(A\bigcup B\right) = CardA + CardB - Card\left(A\bigcap B\right)$

Accompli d'un ensemble:

Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E

L'accompli de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble noté $\overline{A}$ avec : $\overline{A} = \left\{x \in E \,/\, x \notin A\right\}$

Remarques:

- $A\bigcap\overline{A} = \varnothing$
- $A\bigcup\overline{A} = E$
- $Card\overline{A} = CardE - CardA$

Le principe fondamental du dénombrement:

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives ($p \in \mathbb{N}^*$), ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1 ; n_2 ;…; n_p manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$ manières différentes.

Arrangement avec répétition – sans répétition:

Arrangement avec répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n , est : n^p

Arrangement sans répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n , est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p-facteurs}$$

Cas particulier:

Tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments s'appelle une permutation de n éléments et il est égal à : $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Les combinaisons:

Soit E un ensemble fini contenant n éléments
Toute partie A de E contenant p éléments ($p \leq n$), s'appelle une combinaison de p éléments parmi n éléments, et le nombre de ses combinaisons est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Les nombres n! et A_n^p et C_n^p :

($n \in \mathbb{N}^*$) ;	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$		
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$		$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	

Nombre de possibilité d'arrangement de n éléments:

Si on a, n_1 éléments de type A , et n_2 éléments de type B , et n_3 éléments de type C , parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$, alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est : $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$

Quelques types de tirage:

On tire p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif et avec remise	n^p	important
Successif et sans remise	A_n^p	important