

Exercices avec solutions : Le produit vectoriel

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC série science expérimental filière : svt+pc

Le PRODUIT VECTORIEL

Exercice1: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1 \text{ et } \|\vec{v}\|=3 \text{ et } \left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Solution :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exercice2: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les vecteurs : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exercice3: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

Exercice4: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc : } S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -1$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \text{ (ABC)}$$

Et on a : $A(0;1;2) \in (P)$ donc : $0 - 1 - 2 + d = 0$

donc $d = 3$

$$\text{Donc (ABC) : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc (ABC) : } 2x + y + z - 3 = 0$$

Exercice5 L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') 2x + y - z + 2 = 0$$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n'}(2;1;-1)$ deux vecteurs

normaux respectivement de (P) et (P')

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice6 : L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est (D) :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$ et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D) et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\text{Donc : } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\text{Donc : } d(M;(D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

Exercice7 soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

