



I. Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés :

01. Trièdre :

a. Définition :

$[OI]$ et $[OJ]$ et $[OK]$ trois demi-droites non coplanaires de l'espace $(\mathcal{E})$ constituent dans cet ordre un trièdre on note (OI, OJ, OK) chaque demi-droite est appelée cote de trièdre .

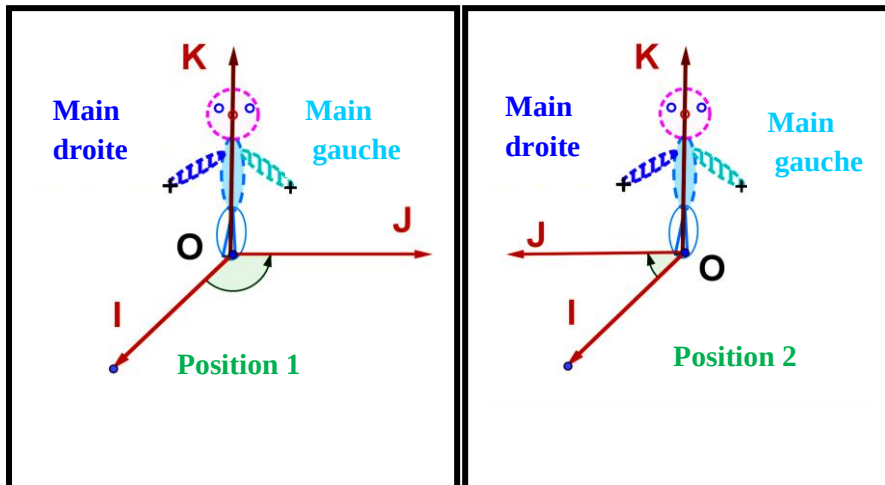
b. Exemple :

02. Bonhomme d'Ampère :

a. Approche :

(OI, OJ, OK) est trièdre , on considère une personne virtuel (ou imaginaire) tel que :

- ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK]$.
 - il regarde le cote $[OI]$.
 - on s'intéresse de la main gauche suit le cote $[OJ]$ si oui ou non .
- cet personne est appelé Bonhomme d'Ampère
donc on a deux positions pour cet personne (voir les positions) .



Gravure de 1825 par [Ambroise Tardieu](#).

Données clés

Naissance	20 janvier 1775 Lyon (France)
Décès	10 juin 1836 (à 61 ans) Marseille (France)
Nationalité	Française
Champs	Mathématiques , physique
Institutions	École polytechnique Collège de France
Renommé pour	Théorème d'Ampère

Signature

A. Ampère

03. Base et repère orientés :

a. Vocabulaire :

La position du bonhomme d'ampère tel que :

ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK]$ et il regarde le cote $[OI]$ et la main gauche suit le cote $[OJ]$; le trièdre (OI, OJ, OK) est appelé trièdre directe ou positif (cette position nous intéresse dans notre leçon) l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative .

On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ d'où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires .

triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe si le trièdre (OI, OJ, OK) est direct.

Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct dans ce cas on dit l'espace est orienté une orientation directe ou positive .

II. Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté :

01. Définition géométrique du produit vectoriel :

a. Définition :

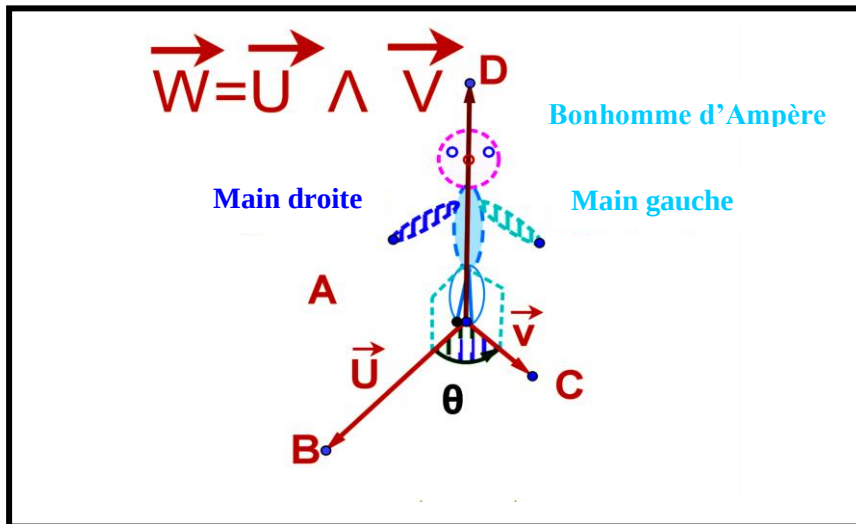
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) orienté .

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se sont pas colinéaires alors :
 - $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c.à.d. $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$)
 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ou encore $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base directe ou encore (AB, AC, AD) est un trièdre direct .
 - La norme de $\vec{w}$ est $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta$, θ est la mesure de l'angle géométrique BAC .

b. Exemple :

Exemple 1 :



Exemple 2 :

On pose : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$ calculer $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

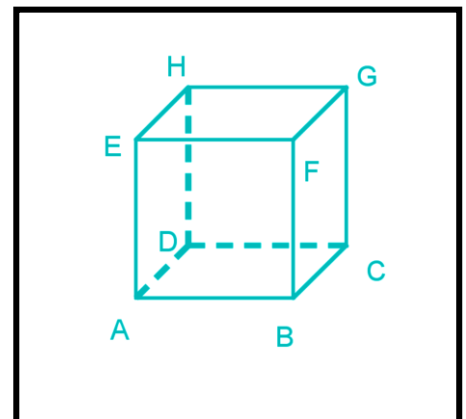
On a :

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\| &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta \\ &= 2 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Conclusion : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 5$

Exemple 3 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre , tel que $AB = 1$.





1. On détermine : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

2. On détermine : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

Correction :

1. On détermine : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

• On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires.

• $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 \times \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$.

2. On détermine : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

• On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HG} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires.

• $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AE}$.

c. Conséquences :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ orienté.

1. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

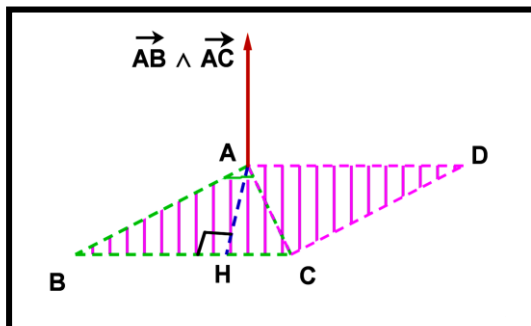
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$) le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthogonale directe.

3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$) et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

4. Le plan passant par le point A a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c.à.d. $P(A, \vec{u}, \vec{v})$) alors le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à ce plan d'où : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v})$.

5. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$.

02. Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs :



a. Propriété :

• La surface du triangle ABC est $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

• La surface du parallélogramme ABC est $S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

03. L'antisymétrie et la linéarité du produit vectoriel :



a. Propriété :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ orienté et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. L'antisymétrie du produit vectoriel : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Bilinearité du produit vectoriel :

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$$

III. Les coordonnées $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de l'espace rapporté à une base orthonormée directe :

a. Propriété :

l'espace rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace on a :

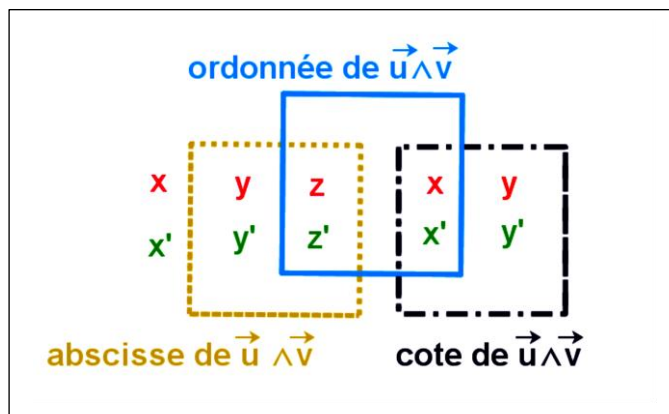
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k} \end{aligned}$$

b. Exemple :

• On a : $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.

$$\vec{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

c. Technique :



IV. Distance d'un point à une droite de l'espace :

a. Propriété :

$D(A, \vec{u})$ est une droite passant par le point A et est dirigé par un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'espace .

M est un point de l'espace ; la distance du point A à la droite $D(A, \vec{u})$ est :

$$d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

b. Exemple :

Calculons la distance du point $M(1, 3, 0)$ à la droite (D) définie par :

$$1. \text{ la présentation paramétrique suivante (D): } \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ Système d'équations cartésiennes suivante (D): } \frac{x+1}{3} = y = \frac{1-z}{2}.$$

Correction :

$$1. \text{ Calculons la distance } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

On a : la droite $D(A(0, 3, -1), \vec{u}(2, -1, 1))$ donc

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ et } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{3}$$

$$\text{D'où : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2. \text{ Calculons la distance } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

On a : la droite $D(A(-1, 0, 1), \vec{u}(3, 1, -2))$ donc

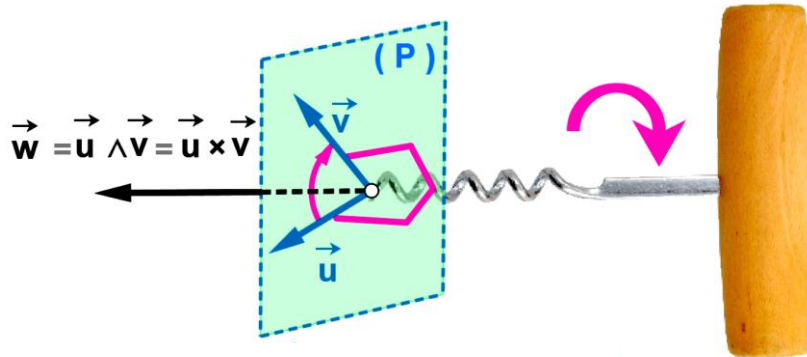
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14} \text{ et } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 3-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \text{ donc } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{75}$$

$$\text{D'où : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1050}}{14}.$$



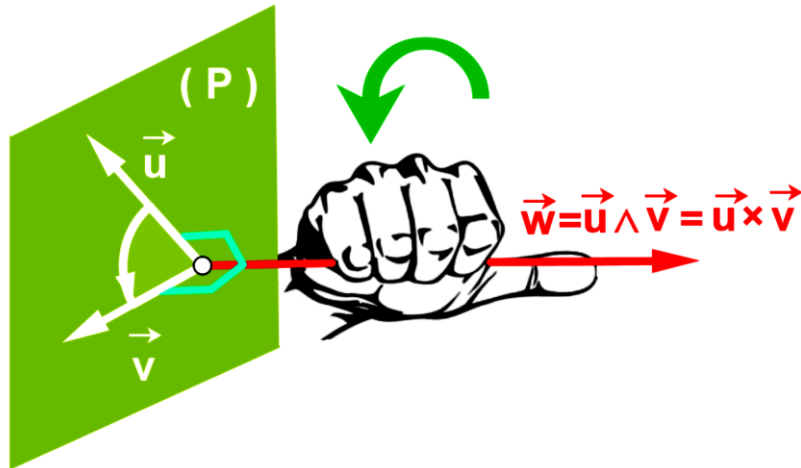
Produit vectoriel on utilise :

règle « de tire bouchon »



règle de "tire bouchon "

"règle de la main droite "



règle de " la main droite "

Bonhomme d'Ampère

