

### 1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

1) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Et soient  $A$  ;  $B$  et  $C$  trois points l'espace tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  ; le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans l'espace est le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  par  $\overrightarrow{AC}$  dans le plan

$ABC$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et c'est un nombre réel définit par

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors et si  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$  et alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB}$

2) toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

3) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.

-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , si l'un des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est nul

-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ , dans le cas contraire.

4)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux dans l'espace si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Et on écrit :  $\vec{u} \perp \vec{v}$

5) Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . La norme du vecteur  $\vec{u}$ , notée  $\|\vec{u}\|$  est la distance AB et on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \quad \text{et} \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

5) Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace., on a :

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b)  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$ , avec  $k$  un nombre réel.

c)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d)  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

e)  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

f)  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

g)  $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$       h)  $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$

i)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

j)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$       k)  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

m) Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$

### 2) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

a)  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormée si et seulement si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux à deux c a d :  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 1$  et  $\|\vec{k}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et  $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$  et  $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

et on dira alors que  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est un repère orthonormé

et si  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace

alors Il existe un triplet unique  $(x; y; z)$  de réels tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce triplet  $(x; y; z)$  est appelé coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  relativement à la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

### 5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormée

1) si:  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  sont deux vecteurs de l'espace alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$

alors :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

1): soit  $\vec{u}(a; b; c)$  un vecteur non nul et  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de l'espace et  $k \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dans l'espace tq :

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  c'est un plan d'équation cartésienne:  
 $ax + by + cz + d = 0$

2) Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est dit normal au plan  $(P)$  si, pour tous points  $A$  et  $M$  de  $(P)$ , on a  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

3) Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

**Propriété :** Soient  $a$  et  $b$  et  $c$  des réels non tous nuls quelconque. L'ensemble  $(P)$  des points  $M(x; y; z)$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan dont un vecteur normal est  $\vec{n}(a; b; c)$ .

**Proposition :** Soient :  $(P) : ax + by + cz + d = 0$   
et  $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$  deux plans dans l'espace et  $\vec{n}(a;b;c)$  et  $\vec{n}'(a';b';c')$  deux vecteurs normaux respectivement à  $(P)$  et  $(P')$

- 1) Les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont parallèles ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires
- 2) Les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont sécants ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont non colinéaires
- 3) Les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont perpendiculaires ssi  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux

### 3) distance d'un point à un plan

**Proposition :** Soient :  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point et  $(P) : ax + by + cz + d = 0$  un plan dans l'espace avec  $(a;b;c) \neq (0;0;0)$  et H est le projeté orthogonal de A sur le plan. la distance du point A au plan  $(P)$  est la distance AH et on a :  $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**Remarque :** pour tout point M du plan  $(P)$  on a  $AH \leq AM$

### 4) Etude analytique de la sphère

**4-1)** Dans tout ce qui va suivre, l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

1) Soit  $\Omega$  un point dans l'espace  $(\mathcal{E})$ .

$R$  et un réel positif. La sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  dans  $(\mathcal{E})$ , tels que  $\Omega M = R$  On la note par :  $S(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{E} / \Omega M = R\}$

2) : Soit  $\Omega(a, b, c)$  un point dans l'espace et  $R \geq 0$ , la sphère  $S(\Omega, R)$  a une équation cartésienne de la forme :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  (1)

4) Soient :  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points de l'espace. L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tel que :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  est la sphère de diamètre  $[AB]$

Et d'équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

### 4-2) L'intersection d'une sphère et une droite :

Soient  $(D)$  une droite de l'espace

et  $(S)$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , H le projeté orthogonal du point  $O$  sur la droite  $(D)$ .

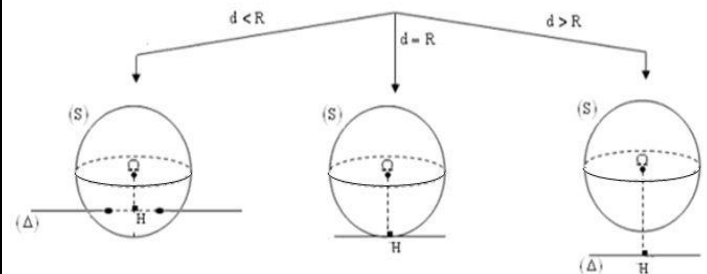
Notons  $d = OH$  :

- Si  $d > R$  alors la droite  $(D)$  et la sphère  $(S)$  n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

- Si  $d = R$  alors la droite  $(D)$  et la sphère  $(S)$  ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite  $(D)$  est tangente en H à  $(S)$

- Si  $d < R$  alors la droite  $(D)$  et la sphère  $(S)$  en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que

la droite  $(D)$  est sécante à  $(S)$ . ( $OA = OB = R$ )



**Remarque:** Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et la droite  $(D)$  revient à résoudre un système formé par l'équation de la sphère et une de représentation paramétrique de la droite

### 4-3) L'intersection d'une sphère et un plan

Soient  $(S)$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ ,  $(P)$  un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(P)$

et  $d = OH$ , la distance du point  $O$  au plan  $(P)$ .

- Si  $d > R$  alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si  $d = R$  alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan  $(P)$  est tangent en H à  $(S)$
- Si  $d < R$  alors l'ensemble des points commun au plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  est le cercle du plan  $(P)$  de centre H et de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$  (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan  $(P)$  est sécant à  $(S)$ .

### 4-4) le plan tangent à une sphère en un point :

Soient  $(S)$  une sphère de centre  $\Omega$  et  $A \in (S)$

Il existe un plan  $(P)$  unique de l'espace tangent à la sphère en A et définie par :  $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

