Dans ce chapitre du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Formule analytique du : produit scalaire-norme d'un vecteur-produit vectoriel:

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}^3$ (l'espace vectoriel)

$\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$ (Produit scalaire)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (norme d'un vecteur)

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$ (Produit vectoriel)

La distance:

La distance entre deux points A et B est égale à :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance entre un point M et une droite $\Delta(A;\vec{u})$ est : $d(M;(\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

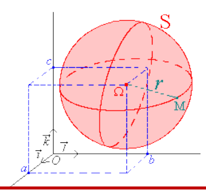
Equation d'un plan:

$(P): ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Si A, B et C sont trois points non alignés, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et dans ce cas on peut déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$

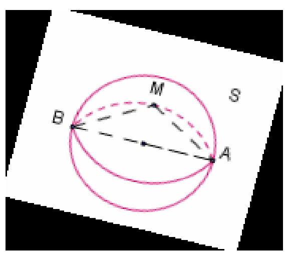
Equation d'une sphère:

L'équation d'une sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$



L'équation d'une sphère (S) dont l'un de ces diamètres est $[AB]$ peut se déterminer à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

Remarque: dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du segment $[AB]$ et de rayon $r = \dfrac{AB}{2}$

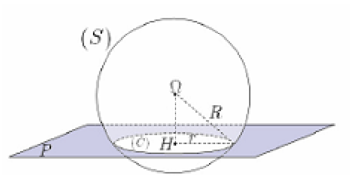


Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ **et un plan** $(P): ax+by+cz+d=0$ **:**

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

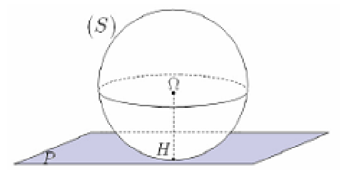
On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(P)\right)$

$d \prec R$



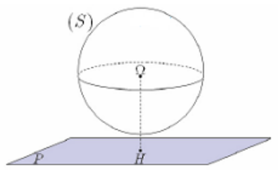
Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$d=R$



Le plan (P) est tangent à la sphère (S)

$d \succ R$



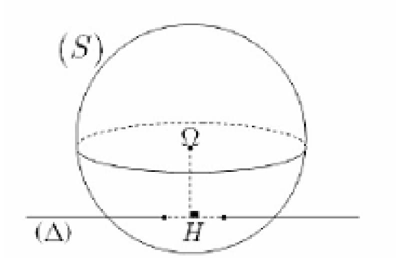
Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ **et une droite** (Δ) **:**

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

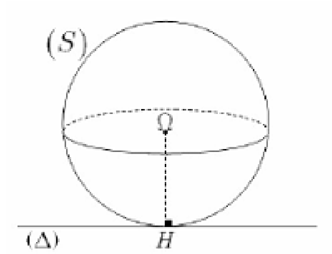
On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(\Delta)\right)$

$d \prec R$



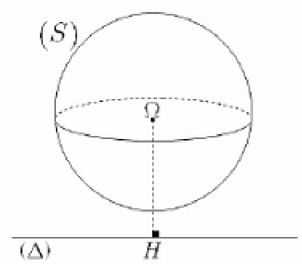
La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents

$d=R$



La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)

$d \succ R$



La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)