



I. Produit scalaire dans l'espace :

a. Définition :

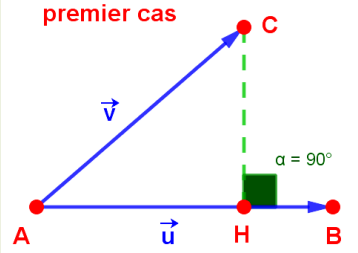
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathcal{E})$; A et B et C trois points de $(\mathcal{E})$ tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; H est la projection de C sur la droite (AB) .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ tel que :

1^{ER} cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

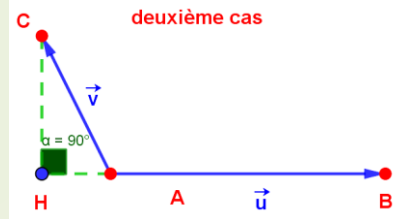
premier cas



2^{ème} cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

deuxième cas



Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

b. Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire) $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

c. Propriétés :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$; $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

3. Positivité du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \geq 0$.

4. Non dégénère : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

5. Linéarité du produit scalaire :
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

6. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

**d. Application :**

Soit ABCD un tétraèdre de faces régulières (chaque face est un triangle équilatéral de côté a pour longueur

- Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux (exemple le coté opposé de $[AB]$ est le coté $[DC]$).

Correction :

On montre que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

On a :

$$\checkmark \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad (1).$$

$$\checkmark \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \text{D'où : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (\text{d'après (1) et (2)}). \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Conclusion : $(AB) \perp (CD)$. (De la même façon on démontre que : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$)

III. Base et repère orthonormé :**a. Rappel :**

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté a une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et w dans cet ordre est le nombre :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'') \end{aligned}$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et w sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

b. Exemple :

$\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(-2, 0, 1)$ et $\vec{w}(1, 0, 3)$ on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times (-7) + 3 \times 0 = 14$$

$$\text{D'où : } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

Conclusion :



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et w ne sont pas coplanaires donc le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace $(\mathcal{E})$.
- On prend un point O de l'espace $(\mathcal{E})$ le quadruplet $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace $(\mathcal{E})$.

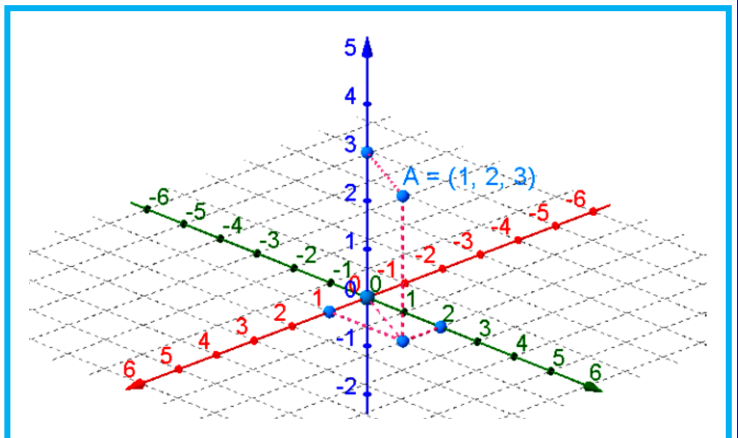
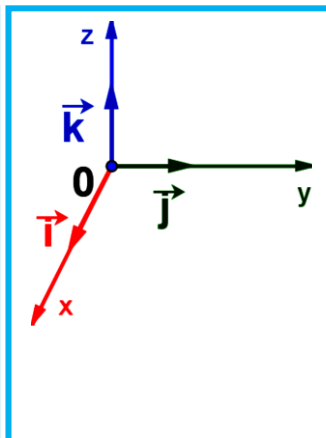
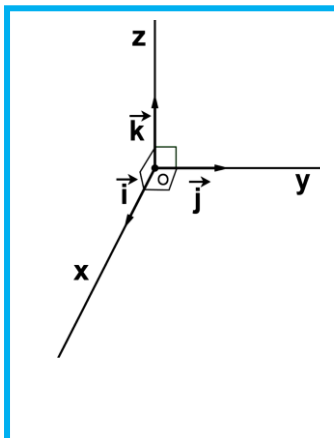
c. Technique :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

(4) (5) (6) (1) (2) (3)

d. Définitions :

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace $(\mathcal{E})$ équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires ($\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0$)
- Prenons un point O de l'espace $(\mathcal{E})$ le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé repère de $(\mathcal{E})$
- Si $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ et $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$ alors :
 - ❖ la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.
 - ❖ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé.



- Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



- On prend $\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v}(x', y', z') = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et $M(x, y, z)$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$.

III. Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

a. Activité :

- On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$ on utilise la linéarité du produit scalaire donner $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de x et y et z et x' et y' et z'.
- Ecrire $\|\vec{u}\|$ en fonction de x et y et z.
- Donner la distance $AB = \|\vec{AB}\|$ en fonction de x_A et y_A et z_A et de x_B et y_B et z_B .
- Donner la propriété.

b. Propriété :

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$.
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. Application :

$\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(5, 7, 4)$ deux vecteurs et $A(1, 5, 7)$ et $B(2, 9, 8)$ deux points de l'espace ($\mathcal{E}$).

- Calculons : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ et AB.

Correction :

- Calculons :

$$\checkmark \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 4 = 31.$$

$$\checkmark \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{88}.$$

$$\checkmark \quad \text{On a : } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 9-5 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où : } AB = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 31$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{88}$ et $AB = \sqrt{18}$.

IV. Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$ avec $\vec{u}(a, b, c)$; $(\vec{u} \neq \vec{0})$:

a. Propriété :

$A(x_A, y_A, z_A)$ est un point et $\vec{u}(a, b, c)$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathcal{E})$ et $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan (P) d'équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

b. Application :

Soient $A(1, 1, 1)$ et $\vec{u}(0, 1, 0)$.

1. On détermine (P) ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Correction :

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\text{On a : } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

Conclusion : ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est le plan d'équation $(P) : y = 1$.

V. Plan déterminer par un point et un vecteur normal :

01. Vecteur normal à un plan :

a. Définition :

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P) .

b. Remarques :

• $\vec{n}$ est normale au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.

• Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A, \vec{n})$.



02. Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$:

a. Propriété :

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est le plan et le vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à ce plan .

b. Application :

- Que représente l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $x + 2y - z + 4 = 0$.

Repense : l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ est le plan (P) tel que :

- ✓ le vecteur $\vec{n}(1, 2, -1)$ est normal à (P) .
- ✓ le plan (P) passe par le point $A(0, 0, 4)$.
- ✓ donc $(P) = P(A, \vec{n})$.

03. Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$:

a. Propriété :

$\vec{n}(a, b, c) \neq \vec{0}$ est un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan (P) qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $P(A, \vec{n})$) .

Le plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

b. Application :

On détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(2, 1, -3)$ et $\vec{n}(1, 1, 2)$ est un vecteur normal à (P) .

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace $(\mathcal{E})$.

On a : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z+3) \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2z + 3 = 0$$

Conclusion : équation cartésienne de (P) est $(P) : x + y + 2z + 3 = 0$.



c. Propriété :

tout plan $P(A, \vec{n}(a, b, c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ la réciproque avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

d. Preuve :

On montre que : le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à ce plan (P) .

On a : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$; (1)

$A(x_0, y_0, z_0) \in (P) \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$; (2)

La différence entre (1) et (2) on obtient :

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \end{aligned}$$

D'où : $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à ce plan .

e. Application :

1. On donne l'équation du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le point $A(0, 0, m)$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1ère méthode :

$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{i}, \vec{j}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & 1 \\ z-m & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (z-m) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 + (z - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - m = 0$$

Conclusion : équation du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$.

2ème méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0, 0, 1)$ est normal au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ donc

équation de $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ est de la forme $0 \times x + 0 \times y + 1 \times z + d = 0$ ou encore $z + d = 0$

On sait que : $A(0, 0, m) \in P(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow m + d = 0$ donc $d = -m$.



Conclusion : équation du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$.

3^{ème} méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-0) \times 0 + (y-0) \times 0 + (z-m) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z - m = 0$$

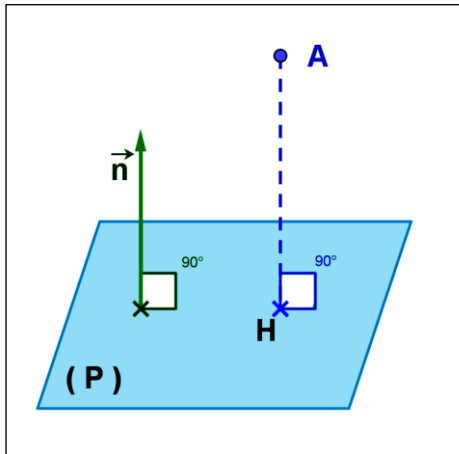
Conclusion : équation du plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $P(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = m$.

VI. Distance d'un point à un plan :

a. Définition :

(P) est un plan et A est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ et H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) la distance du point A au plan (P) est AH et on note $AH = d(A, (P))$.

b. Exemple :



c. Propriété :

(P) est un plan et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que (P) a pour équation $(P) : ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan (P) est $AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

d. Preuve :

On considère $H(x_H, y_H, z_H)$ H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) .

- On sait que : le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à ce plan (P) ($\vec{n} \perp (P)$) (1)



- H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) donc $\overrightarrow{AH} \perp (P)$. (2)
- $H \in (P) \Leftrightarrow ax_H + by_H + cz_H + d = 0$; donc : $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
- D'après (1) et (2) on obtient $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires , d'où $\left| \cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n}) \right| = 1$ et

$$\left| \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} \right| = AH \left\| \vec{n} \right\| \left| \cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n}) \right| = AH \left\| \vec{n} \right\| \text{ on obtient } \left| \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} \right| = AH \left\| \vec{n} \right\| \quad (4)$$

- D'autre part : le produit scalaire est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) \\ &= ax_A + by_A + cz_A - \underbrace{(ax_H + by_H + cz_H)}_{-d} \\ &= ax_A + by_A + cz_A + d \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \left| \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} \right| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \quad (3)$$

D'après (3) et (4) on obtient $AH \left\| \vec{n} \right\| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$

$$\text{D'où : } AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\left\| \vec{n} \right\|}.$$

e. Application :

On considère le plan d'équation (P) $x + 3y - 5z + 1 = 0$.

1. Est-ce que : $A(1,1,1) \in (P)$

On a : $(P) 1 + 3 \times 1 - 5 \times 1 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$ d'où : $A(1,1,1) \in (P)$

2. Donner la distance $d(A, (P))$

1^{ère} méthode :

✓ Puis que $A(1,1,1) \in (P)$ donc la projection orthogonale de A sur le plan (P) est $A = H$
Donc $AH = AA = 0$ donc $d(A, (P)) = 0$.

Conclusion : la distance $d(A, (P)) = 0$.

2^{ème} méthode :

✓ On applique la propriété :

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 3 \times 1 - 5 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{|0|}{35} = 0$$

Conclusion : la distance $d(A, (P)) = 0$

VII. Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans :

01. Parallélisme et orthogonalité de deux plans :

a. Propriétés :

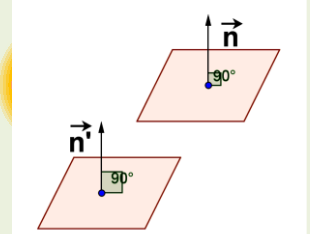
$$(P_1): ax+by+cz+d=0 \text{ et } (P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{n'} \text{ sont colinéaires})$$

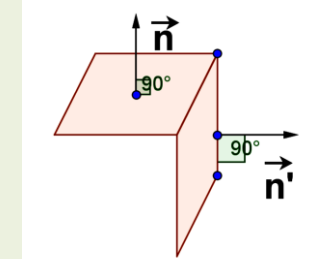
$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ (non nuls)}$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 (\vec{n} \text{ et } \vec{n'})$$

$$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \vec{n'} = \alpha \vec{n}$$



$$(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \vec{n'} \cdot \vec{n} = 0$$

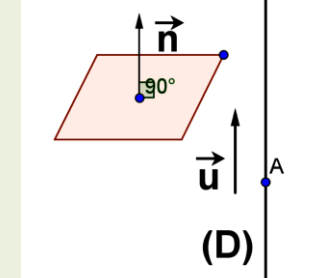
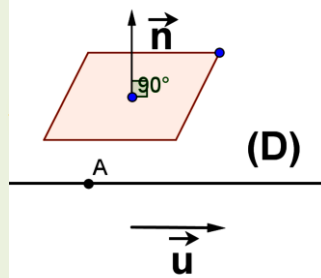


02. Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan :

$$P(B, \vec{n}) \text{ et } D(A, \vec{u}) \text{ et } (P): ax+by+cz+d=0$$

$$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires})$$



VIII. Etude analytique du sphère :

01. Sphère :

a. Définition :

Ω est un point donné de l'espace $(\mathcal{E})$ et $R > 0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on note (S) ou $S(\Omega, R)$.

02. Equation cartésienne d'une sphère :

a. Définition propriété :

Equation cartésienne de $(S) = S(\Omega(a,b,c), r)$ est : $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$ ou

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2 \text{ ou bien : } x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

b. Application :

On donne l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0), 1)$

$$\text{on a : } (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0), 1)$ est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



03. Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$.

a. Définition :

Ω est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S)

On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.

b. Propriété :

Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

ou bien $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$.

c. Preuve :

Soit I le milieu de $[AB]$ (centre du sphère (S)) .

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} - IA^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \\ &\Leftrightarrow MI = IA \\ &\Leftrightarrow M \in S_{(I, r=IA)} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ c'est le sphère

(S) de centre I le milieu de $[AB]$ et de rayon $r = IA = \frac{AB}{2}$ ou encore le sphère $S_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$

d. Exemple :

Soient $A(0, 1, 0)$ et $B(0, -1, 0)$ deux points de l'espace $(\mathcal{E})$.

On détermine l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$:

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in S_{[AB]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 ; \left(\text{ou } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$ est $S_{[AB]} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

04. L'ensemble des $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$:

a. Propriété :

L'ensemble des $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ avec a et b et c et d de $\mathbb{R}$ on pose $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$ est :

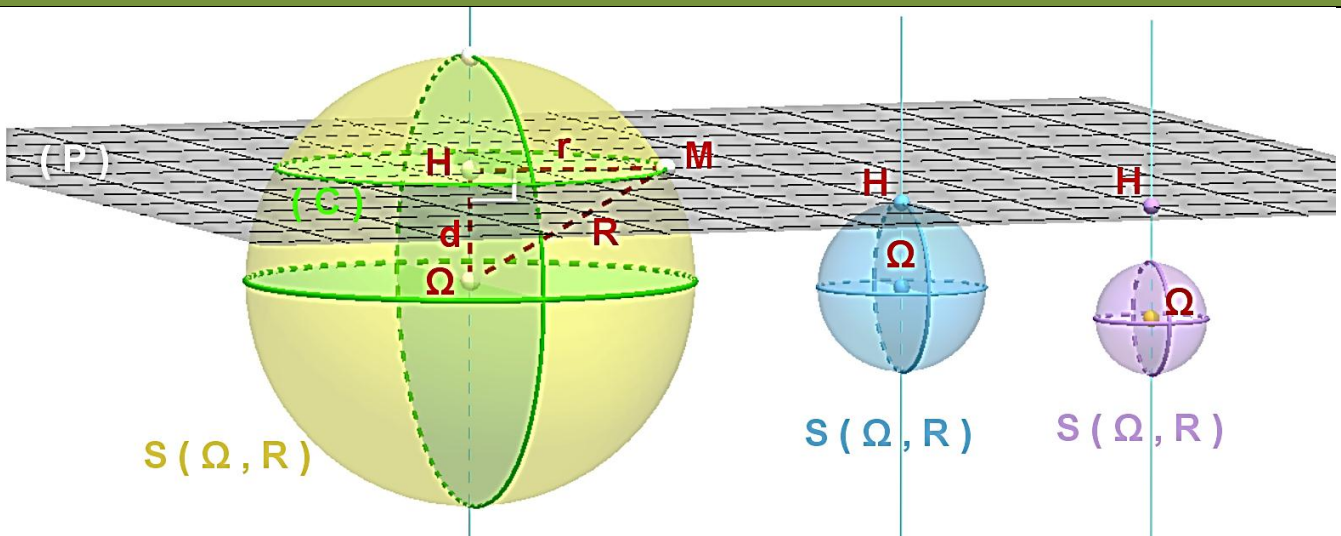
- $(E) = \emptyset$ si $A < 0$.
- $(E) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$ si $A = 0$.
- Le Sphère $(E) = S \left(\Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$ si $A > 0$.



IX. Positions relatives d'une sphère et un plan :

01. Positions et les schémas et théorème:

a. Intersection d'un plan (P) et une sphère (S)

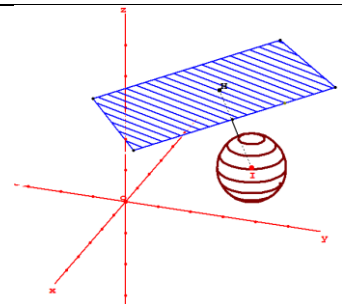
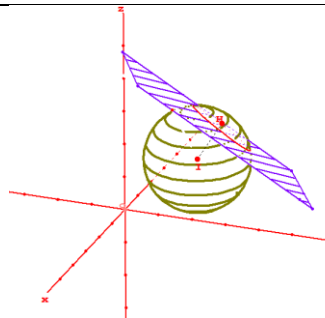
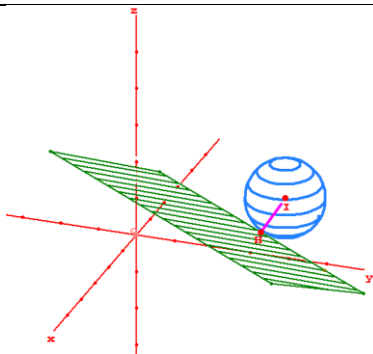


b. Théorème :

3^{ème} CAS : $d = \Omega H < R$ on a $(P) \cap (S) = (C)$
 (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H
 et de rayon $R_C = \sqrt{R_s^2 - d^2}$ $R_C = r$ et $R_s = R$

2^{ème} CAS : $d = \Omega H = R$ on
 a $(P) \cap (S) = \{H\}$ (P) et
 (S) sont tangents en H
 avec $(H\Omega) \perp (P)$

1^{ER} CAS : $d = \Omega H > R$
 on a $(P) \cap (S) = \emptyset$
 (P) et (S) son disjoints



a. Remarques :

- H est la projection de Ω sur (P) et $d = \Omega H = d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- on détermine H par l'intersection du plan (P) et la droite (D) perpendiculaire au plan passant par Ω
- Vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (D) .

02. Equation du plan tangent à une sphère :

a. Théorème :

par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A . l'équation de (Q) est : $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

X. Positions relatives d'une sphère et une droite :

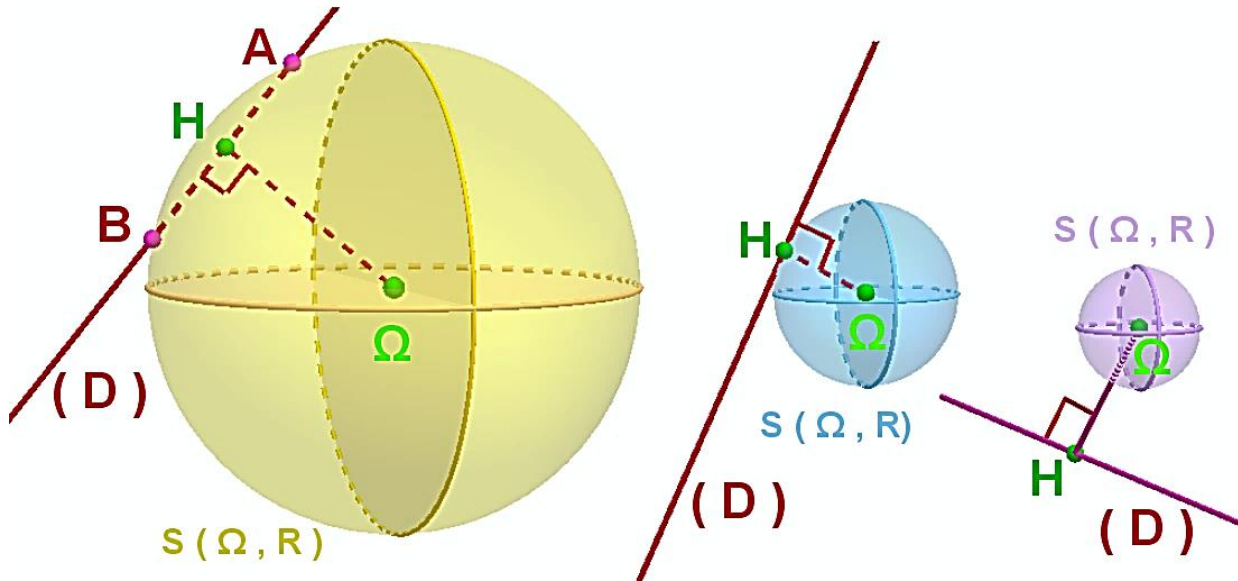
01. Positions et les schémas et théorème :

a. Intersection d'une droite (D) et une sphère (S)

3^{ème} CAS :

2^{ème} CAS

1^{ER} CAS :



b. théorème

3^{ème} CAS : $(D) \cap (S) = \{A, B\}$

2^{ème} CAS / $(D) \cap (S) = \{H\}$

1^{ER} CAS : $(D) \cap (S) = \emptyset$

(D) coupe (S) en deux points A et B
(Deux points mais pas le segment $[AB]$)

(D) et (S) sont tangents
en H avec $(H\Omega) \perp (D)$

(P) et (S) son disjoint

CONDITION : $d = \Omega H < R$

CONDITION : $d = \Omega H = R$

CONDITION : $d = \Omega H > R$

REMARQUES

- H est la projection de Ω sur (D) .

- Si $(D) = D(K, \vec{u})$ on a $d = \Omega H = \frac{\|\overrightarrow{K\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ (voir chapitre produit vectoriel).