

Intégration d'une fonction continue sur un segment :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I , a et b deux éléments de I . Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est appelé l'intégrale de a à b de la fonction f et se note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, On peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre.

(On dit que x est une variable muette), c'est-à-dire : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta = \dots$

Propriété :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad ; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Relation de chasles – linéarité de l'intégrale :

Relation de chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, c]$, et $b \in [a, c]$.

$$\text{On a : } \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Linéarité :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{On a : } \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{Et} \quad \int_a^b \alpha \times f(x)dx = \alpha \times \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Intégration par Parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur un intervalle I . Soit a et b deux éléments de I .

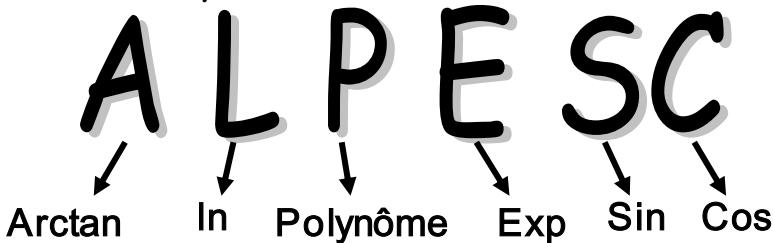
$$\text{On a : } \int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx.$$

Cette formule est appelée formule de l'intégration par parties.

Exemple :

En utilisant une intégration par parties : Calculer $I = \int_1^e x \times \ln(x)dx$.

Pour déterminer la fonction primitive et la fonction dérivée en utilise la méthode suivante :



La première fonction dans ALPESC est une fonction primitive et la deuxième est une fonction dérivée.

Donc : On pose :
$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$$
 donc :
$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

U et v sont dérivable sur $[1;e]$, et u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;e]$, d'après la propriété de l'intégration par parties on a :

$$I = \int_1^e x \times \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Donc : $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.

↳ Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

☞ Le nombre réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

☞ Il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

↳ Calcul d'aires :

☞ Propriété 1 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

☞ L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.a$.

☞ Propriété 2 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Et (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) sont les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

☞ L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) , et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a$.

↳ Calcul des volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

☞ Le volume de solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (\mathcal{C}_f)

autour de l'axe des abscisses : Est $V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$.

$u.a$: est l'unité d'aire ($u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$) et $u.v$: est l'unité de volume ($u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$).