

CALCULS INTEGRALES

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences ex (pc-svt...)

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I . Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de la fonction f entre a et b on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

on lit somme $f(x)dx$ de a à b et on l'appelle intégrale de a à b . Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure **Remarque :** la variable t est une variable muette, on peut la changer par n'importe qu'elle variable

Propriété1 : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

Propriété2 : Soient f , g et f' des fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de I et α un réel, on a

$$1) \int_a^b f'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$2) \int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a) \quad 3) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$4) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$5) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$6) \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ (linéarité)}$$

$$7) \int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad \text{(linéarité)}$$

Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$

1) Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2) Si $(\forall x \in [a; b]) ; f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$3) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|$$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans $[a ; b]$. Tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ S'appelle La valeur moyenne de } f$$

Sur $[a ; b]$

III) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

| La fonction | Sa fonction primitive |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| α ($\alpha \in \mathbb{R}$) | $\alpha x + c$ |
| x^n ($n \in \mathbb{N}$) | $\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ |
| \sqrt{x} | $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$ |
| x^r ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$) | $\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$ |
| $\sin(ax+b)$ | $\frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$ |
| $\cos(ax+b)$ | $\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$ |
| $\frac{a}{1+x^2}$ | $a \times \arctan(x) + c$ |

| La fonction | Sa fonction primitive |
|--|--|
| $u' + v'$ | $u + v + C^{te}$ |
| $\alpha u'$ | $\alpha u + C^{te}$ |
| $u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) | $\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$ |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $\frac{-1}{u} + C^{te}$ |
| $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u} + C^{te}$ |
| $u'^n \sqrt{u}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) | $\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$ |
| $u'u^r$ ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$) | $\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$ |
| $u' \times v' ou$ | $vou + C^{te}$ |
| $\frac{u'}{u^2+1}$ | $\arctan(u) + C$ |

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

2) Intégration par partie :

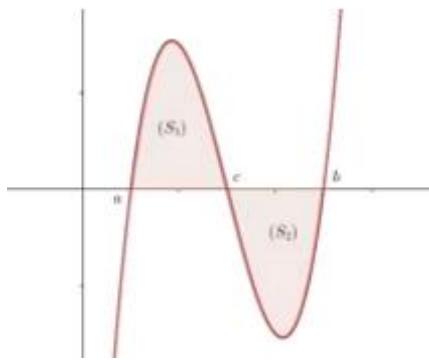
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continues sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

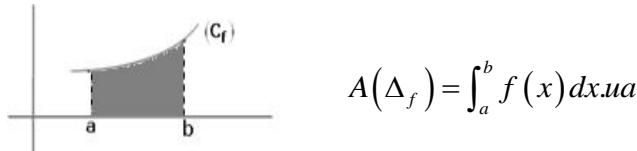
IV) INTEGRALE ET SURFACE.

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation :

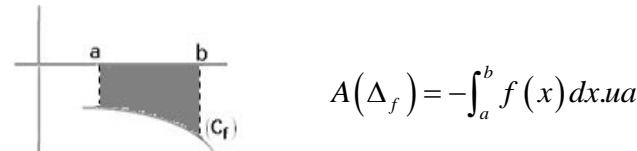
$$x = a \text{ et } x = b \text{ est : } A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \text{ ua}$$



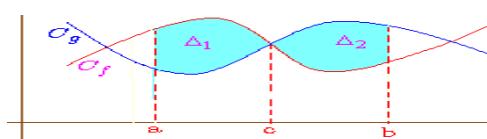
2) Si f une fonction continue et positive sur $[a ; b]$



3) si f une fonction continue et négatif sur $[a ; b]$



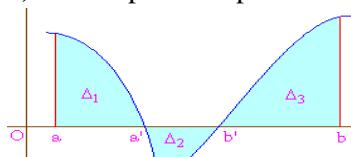
4) Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

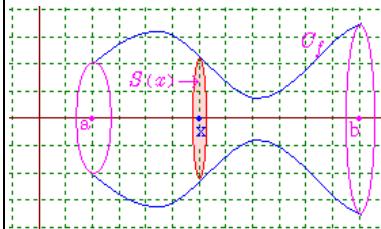
$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

5) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^b f(x)dx$$

V) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES



Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des

abscisses engendre un solide de volume $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$

$u.v$ (par unité de volume)

$$\text{si le repère est : } (o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \quad u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\|$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

