

## Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



## CALCULS D'INTEGRALS

page

I. Intégral d'une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  :

## a. Définition :

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Le nombre  $F(b) - F(a)$  est appelé intégral de  $f$  de  $a$  à  $b$ , on note  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ .

On lit intégral de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$ .

## b. Remarque :

Dans l'écriture  $\int_a^b f(x)dx$  on peut remplacer le variable  $x$  soit par les variables  $y$  et  $z$  et  $t \dots$  donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

## c. Exemple :

Calculons :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 = \left( \frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) - \left( \frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) = -\frac{2}{3}.$$

$$\bullet \int_1^0 (x^2 - 2x)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^0 = \left( \frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) - \left( \frac{1}{3}1^3 - 1^2 \right) = \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = \int_2^{1+e} 4 \times \frac{(x-1)'}{x-1}dx = [4 \ln|x-1|]_2^{1+e} = (4 \ln(1+e-1) - 4 \ln(2-1)) = 4$$

$$\bullet 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{(x-1)'}{x-1}dx = 4 [\ln|x-1|]_2^{1+e} = 4 (\ln(1+e-1) - \ln(2-1)) = 4.$$

On remarque que :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)dx = - \int_1^0 (x^2 - 2x)dx.$$

$$\bullet \int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx.$$

## II. Propriétés : relation de Shales – linéarité – ordre .

## a. Propriété :

$f$  est une fonction dérivable sur un segment  $[a, b]$  et sa fonction dérivée  $f'$  est continue sur  $[a, b]$  on a :

$$\bullet \int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

$$\bullet \int_a^b cdx = [cx]_a^b = c(b-a); (c \in \mathbb{R}).$$

## b. Exemple :

$$\bullet \int_0^1 (x^2 - 2x)'dx = [x^2 - 2x]_0^1 = (1^2 - 2 \times 1) - (0^2 - 2 \times 0) = -1.$$

$$\bullet \int_3^5 7dx = 7(5-3) = 14.$$

c. Relation de Chasles :

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$  .
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$  .
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$  avec  $a \leq c \leq b$  . ( relation de Chasles ) .

d. Exemples :

- $\int_5^5 (x^2 - 2x)dx = 0$
- $\int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -\int_1^0 (x^2 - 2x)dx$
- $\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$   
 $= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$  ( car  $|x-1| = 1-x$  sur  $[0,1]$  et  $|x-1| = x-1$  sur  $[1,3]$  )  
 $= \left[ x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3$   
 $= \frac{1}{2} + \left( \frac{3}{2} - \left( -\frac{1}{2} \right) \right)$   
 $= \frac{5}{2}$

e. Linéarité :

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$  on a :

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$   
 $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$  ;  $(\alpha \in \mathbb{R})$

f. Exemples :

## ■ Exemple 1 :

- $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = 4 \int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx$  .
- On pose :  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$  et  $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$   
  1. On calcule :  $A+B$  et  $A-B$  .
  2. On déduit les valeurs de  $A$  et  $B$  .

Correction :

  1. On calcule  $A+B$  et  $A-B$  .  
✓ On a :



$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= 1 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc  $A + B = \frac{\pi}{2}$

✓ On a :

$$\begin{aligned} A - B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \quad ; \quad (\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos 2x) \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\pi) - \sin 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $A + B = \frac{\pi}{2}$

2. On déduit les valeurs de A et B .

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} A + B = \frac{\pi}{2} \\ A - B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = \frac{\pi}{4} .$$

Conclusion :  $A = B = \frac{\pi}{4} .$

■ Exemple 2 :

Montrer que :  $\int_2^5 \ln(x+1) dx \leq \int_2^5 \ln(x+3) dx .$

Sachant que :

$$\begin{aligned} 1 &\leq 3 \Rightarrow x+1 \leq x+3 \\ &\Rightarrow \int_2^5 (x+1) dx \leq \int_2^5 (x+3) dx \end{aligned}$$

Conclusion :  $\int_2^5 \ln(x+1) dx \leq \int_2^5 \ln(x+3) dx .$

Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D' INTEGRALS

page



III. Valeur moyenne :

a. Propriété :

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et  $a < b$ .

Il existe au moins un élément  $c$  de  $[a, b]$  tel que :  $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$ .

Le nombre  $f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$  s'appelle la valeur moyenne de  $f$  sur  $[ab]$ .

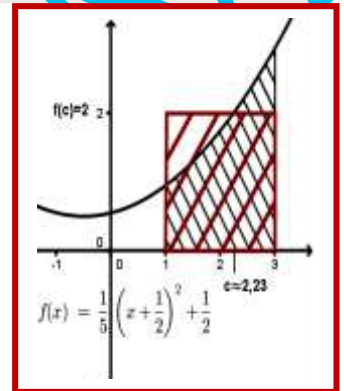
b. Exemple :

Soit  $f(x) = 3x$ .

On détermine la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0, 2]$  :

$$\text{On a : } f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (4-0) = 3.$$

Conclusion : la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0, 2]$  est  $f(c) = 3$ .



IV. L' intégration par parties :

a. Théorème :

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur  $[ab]$  leurs dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[ab]$  on a

$$\int_a^b \underbrace{u(x)}_{(1)} \times \underbrace{v'(x)}_{(2)} dx = \underbrace{\left[ u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(3)}$$

b. Méthode ou bien disposition :

$u(x) = \dots$        $u'(x) = \dots$

(1) ↓      (2) ↘      -      ↓ (3)

$v'(x) = \dots$        $v(x) = \dots$

c. Exemples :

On calcule :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  en utilisant une intégration par parties.

On pose :

$u(x) = x$        $u'(x) = 1$

(1) ↓      (2) ↘      -      ↓ (3)

$v'(x) = \cos x$        $v(x) = \sin x$

D'où :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[ x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx$

$$= \left( \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 \right) - \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$



**Conclusion :**  $I = \frac{\pi}{2} - 1$ .

- On calcule :  $J = \int_1^e x \ln(x) dx$  en utilisant l'intégration par parties .

**On pose :**

$$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int_1^e x \ln(x) dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (e^2 \ln(e) - 1^2 \ln(1)) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1^2) = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $J = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$ .

## V. Applications sur les intégrales calculs des surfaces :

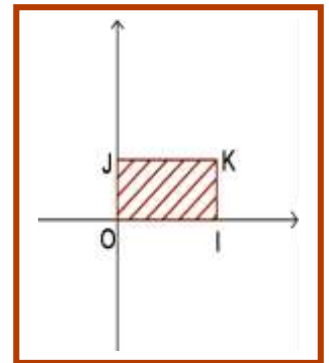
**OL.**

Calculs des surfaces :

### a. Introduction :

➤ **Unité d'aire (unité de surface) :**

- Le plan (P) est rapporté a un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .
- on pose  $\vec{OI} = \vec{i}$  et  $\vec{OJ} = \vec{j}$  et le point K tel que OIKJ est parallélogramme .
- On considère la surface du parallélogramme OIKJ comme unité d'aire ( du la surface ) cette aire on la note 1 u.a



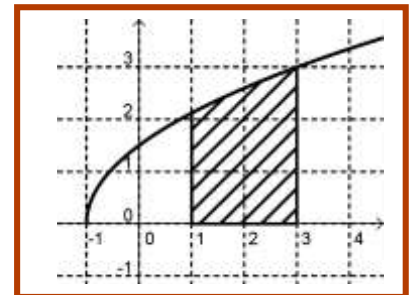
➤ **L'aire (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses**

f est une fonction continue sur  $[ab]$  et  $(C_f)$  la courbe de f .

- (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  .
- On désigne par A la surface de la partie (F) du plan (P) .

**Remarque :** la surface A se calcule par l'intégral

$$\int_a^b f(x) dx \text{ et dépend du signe de } f(x)$$



Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D' INTEGRALS

page



**b. Propriété :**

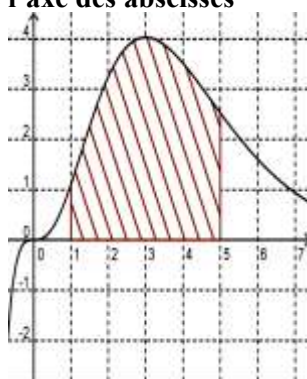
$f$  est une fonction continue sur  $[ab]$  et  $(C_f)$  la courbe de  $f$  dans le plan  $(P)$  est rapporté a un repère orthogonal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'aire  $S$  ( la surface ) de la partie  $(F)$  du plan  $(P)$  comprise entre la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est  $A = \int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$  (u.a) ( unité d'aire )

**c. Les cas possibles :**

La fonction  $f$  est positive sur  $[ab]$ .

( c'est-à-dire  $(C_f)$  au dessus de l'axe des abscisses

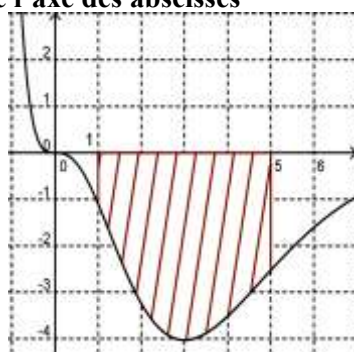


La surface est :

$$A = \int_a^b f(x) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

La fonction  $f$  est négative sur  $[ab]$ .

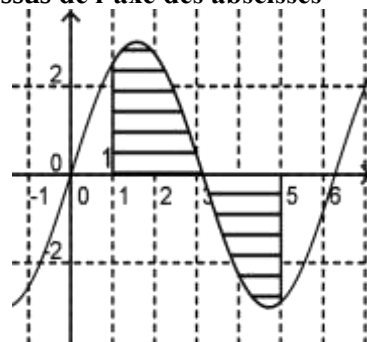
( c'est-à-dire  $(C_f)$  au dessous de l'axe des abscisses



La surface est :

$$A = -\int_a^b f(x) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

La fonction  $f$  est change de signe sur  $[ab]$ . ( c'est-à-dire  $(C_f)$  au dessous et au dessus de l'axe des abscisses

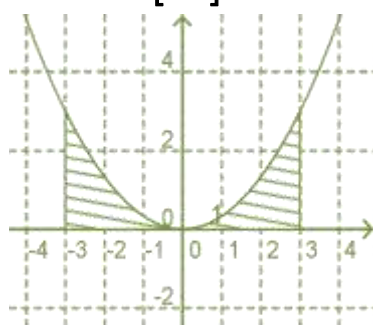


La surface est :

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

$$= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx \text{ (u.a)}$$

$f$  est une fonction paire sur  $[-a, a]$  est positive sur  $[0, a]$ .



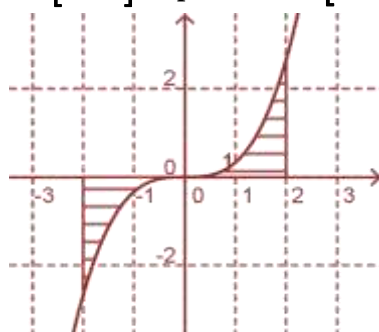
On a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ u.a}$$

**Remarque :**

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

$f$  est une fonction impaire sur  $[-a, a]$  et positive sur  $[0, a]$



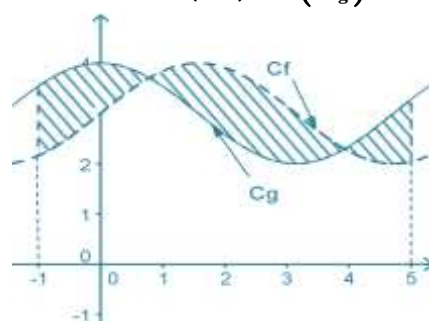
On a est :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ u.a}$$

**Remarque :**  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$$

domaine du plan comprise entre les deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$



On considère  $\mathcal{A}$  La surface du domaine du plan comprise entre les deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ . La surface est :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ u.a}$$

Niveau: 2 P.C. + 2 S.V.- COURS



CALCULS D' INTEGRALS

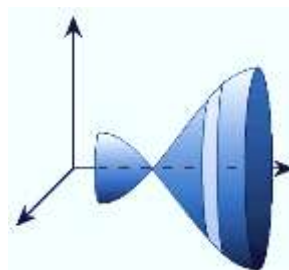
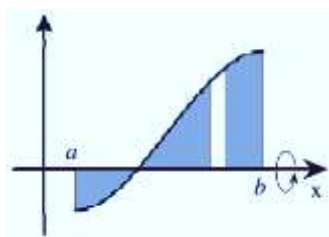
page



02. Calculs des volumes :

a. Approche :

- L'espace est muni d'un repère orthogonal  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
- $(C_f)$  la courbe d'une fonction continue sur  $[ab]$  avec  $(a < b)$ .
- On suppose que  $(C_f)$  tourne au tour de l'axe des abscisse de  $360^\circ$  la forme obtenue s'appelle le solide de révolution
- le solide de révolution obtenu à pour volume :



b. Propriété :

L'espace est muni d'un repère orthogonal  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$(C_f)$  la courbe  $f$  est une fonction continue sur  $[ab]$  avec  $(a < b)$ .

Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  au tour de

l'axe des abscisse de  $360^\circ$  son volume  $V$  est :  $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$  (unité de volume)

c. Exemple :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , tel que  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$ .

Exemple 1 :

On considère la fonction  $f(x) = x - 5$  sur  $[-1, 2]$ ,  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  au tour de l'axe des abscisse de  $360^\circ$ .

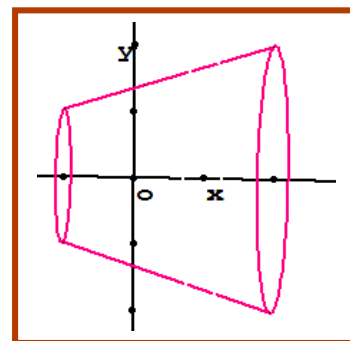
2. On calcule  $V$  le volume du solide de révolution obtenu :

On a :  $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$  (unité de volume)

$$V = \int_{-1}^2 \pi (x-5)^2 dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x-5)^2 dx \text{ cm}^3$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{3} (x-5)^3 \right]_{-1}^2 \text{ cm}^3$$





$$= \frac{\pi}{3} \left( (-3)^3 - (-6)^3 \right) \text{ cm}^3$$

$$= \frac{\pi}{3} (-3^3 + 6^3) \text{ cm}^3$$

$$= 63\pi \text{ cm}^3$$

**Conclusion :** le volume du solide de révolution est  $V = 63\pi \text{ cm}^3$ .

**Exemple 2 :**

On considère la fonction  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  sur  $[-1,1]$ ,  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  sur  $[a,b]$  au tour de l'axe des abscisse de  $360^\circ$ .

2. On calcule  $V$  le volume du solide de révolution obtenu :

On a :  $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$  ( unité de volume )

$$V = \int_{-1}^1 \pi \sqrt{1-x^2}^2 dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \int_{-1}^1 \pi (1-x^2) dx 1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$$

$$= \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

**Conclusion :** le volume du solide de révolution est  $V = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

**Remarque :**

- c'est le volume d'une boule de rayon  $R = 1$ .
- Si on la fonction  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  sur  $[-R, R]$  avec  $R > 0$ .

on obtient le volume d'une boule de rayon  $R > 0$  :  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

