Exercices d'applications et de réflexions *sur les nombres complexes (Partie 2)*

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

TD :NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

Exercice1 : Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Exercice2 :en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4\theta$

Exercice4 :1) Montrer que $(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1-e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Exercice5 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \theta\in\mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta \quad \theta\in\mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Exercice6 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

2) $(E): z^2 - z - 2 = 0$

3) $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

Exercice7 :soit $z\in\mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z) = 0$

Exercice8 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

3) $(4\cos\theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin\theta = 0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice9 :1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$\boldsymbol{z}^2 - 8\boldsymbol{z} + 17 = 0$

2) Soit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^3 + (-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2 + (17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z} + 17\boldsymbol{i}$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b)déterminer les réels $a;b;c$ tels que :

$$P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2-2Z+5=0$ 2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

Exercice11: soit : $z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice12 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1)montrer que : $z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Exercice13 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k=4$

1)montrer que : $z'=4z-9+6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Exercice14 : Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz+4i+12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Exercice15 :Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$

Exercice16: Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Exercice 17: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que

$z'=-2z+3-3i$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Exercice 18: Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point : A (i) et la rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et soit R_1 la rotation de centre A (i) et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Exercice 19: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T=t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1=R\circ T$ et $F_2=T\circ R$

Exercice 20:soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1|\leq\left||z|-1\right|+|z||\arg z|$

Exercice21 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$|a|=|b|=|c|=1$ et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice22 :soit le nombre complexe $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S=z+z^2+z^4$ et $T=z^3+z^5+z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S)\succ0$

3)calculer $S+T$ et $S\times T$

4)en déduire les nombres S et T

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien