LAGDEM Mohamed

les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$-L'écriture algébrique :

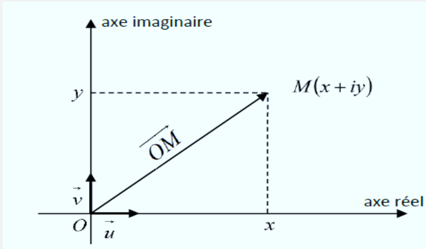
- ✓ L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$
- ✓ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = x + iy$ $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $i^2 = -1$
- ✓ L'écriture $x + iy$ appelée la forme algébrique de z
- ✓ Le nombre x appelé la partie réel de z et noté $Re(z)$
- ✓ Le nombre y appelé la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$	✓ Si $Im(z) = 0$ alors z est un réel ✓ Si $Re(z) = 0$ et $Im(z) \neq 0$ alors z est un imaginaire pur

La représentation géométrique d'un nombre complexe

le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- ✓ Le point $M(x, y)$ appelé image de z noté $M(z)$
- ✓ Le nombre z appelé affixe de M et noté z_M
- ✓ Le nombre z appelé affixe de $\overrightarrow{OM}$ et noté $z = aff(\overrightarrow{OM})$
- ✓ L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$



La notion	La relation complexe
I le milieu de $[AB]$	$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
A et B et C points alignés	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

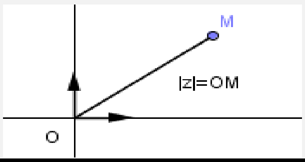
Le conjugué d'un nombre complexe

Définition	soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ▪ le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Propriétés	▪ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ▪ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ ▪ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$ ▪ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ $\quad z \neq 0$ ▪ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $\quad z' \neq 0$	▪ z un nombre réel $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = z$ ▪ z un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = -z$ ▪ $z + \bar{z} = 2Re(z)$ ▪ $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$ ▪ $z\bar{z} = x^2 + y^2$

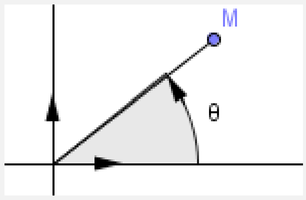
Le module d'un nombre complexe

Définition	Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Le module de z est le nombre réel positive $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés	$\|z\times z'\|=\|z\|\times\|z'\|$ $\|\bar{z}\|=\|z\|$ $\left\|\frac{z}{z'}\right\|=\frac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\|z^n\|=\|z\|^n$ $\|-z\|=\|z\|$ $\left\|\frac{1}{z}\right\|=\frac{1}{\|z\|}$	$\|z\|=OM$ 

La distance AB	$AB=\|z_B-z_A\|$

L'argument d'un nombre complexe-la forme trigonométrique

Définition	L'argument de z est tout mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$ (M est l'image de z) et noté $arg(z)$ $arg(z)=\theta[2\pi]$	

cas particulières	$z\in\mathbb{R}_+^*\iff arg(z)\equiv 0[2\pi]$ $z\in\mathbb{R}_+^*\iff arg(iz)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$z\in\mathbb{R}_-^*\iff arg(z)\equiv\pi[2\pi]$ $z\in\mathbb{R}_-^*\iff arg(iz)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$

Mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$	$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})=\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})[2\pi]$

La forme trigonométrique	Soit z un complexe $arg(z)=\theta[2\pi]$ et $\|z\|=r$ ▪ La forme trigonométrique de z est : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

La forme exponentielle	Soit z un complexe $arg(z)=\theta[2\pi]$ et $\|z\|=r$ La forme exponentielle de z est : $z=re^{i\theta}$	▪ Autre notation $re^{i\theta}=[r,\theta]$

Propriétés	▪ $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ ▪ $-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$ ▪ $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$ ▪ $(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$ ▪ $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ ▪ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	▪ $arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg(-z)\equiv\pi+arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg(zz')\equiv(arg(z)+arg(z'))[2\pi]$ ▪ $arg(z^n)\equiv n\,arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv -arg(z)[2\pi]$ ▪ $arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$

Formules d'Euler	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre :	$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Points cocyclique	
A et B et C et D des points cocyclique si	$\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A} \times \dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C} \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points M(z) qui vérifient	La notion géométrique
$\lvert z-z_A\rvert = r$ $\Leftrightarrow \quad AM = r$	Cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$ $\Leftrightarrow \quad AM = BM$	la médiatrice de $[AB]$

Nature du triangle

ABC triangle rectangle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = re^{\pm i\frac{\pi}{2}}$
ABC triangle isocèle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{i\theta}$
ABC triangle isocèle et rectangle en A	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$
ABC triangle équilatérale	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a et b et c des réels)

L'équation $z^2 = a$ $z \in \mathbb{C}$	Solutions
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

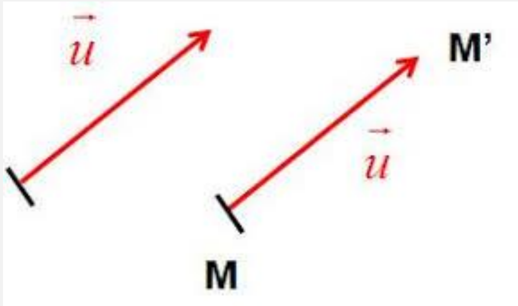
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ $a \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$	Solutions
$\Delta > 0$	$S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
$\Delta = 0$	$S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta < 0$	$S = \left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Ecriture complexe des transformations géométriques

$$M(z)\ ,\ M'(z')$$

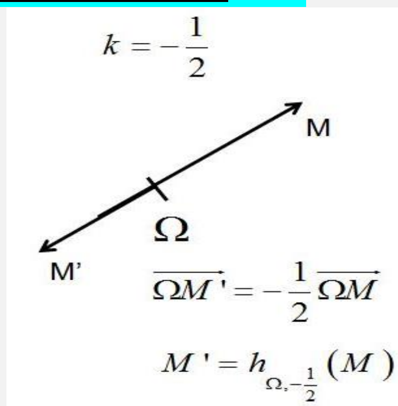
$T_{\vec{u}}$: T translation de vecteur $\vec{u}$

$$T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$
$$\Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{u}}$$
$$\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$$



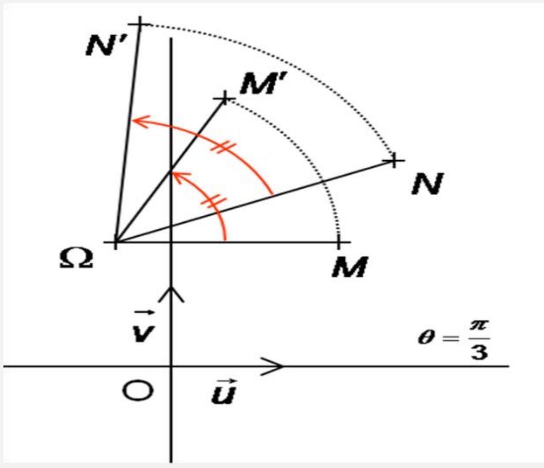
$h(\Omega,k)$: h homothétie de centre Ω et de rapport k

$$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow z'=k(z-z_\Omega)+z_\Omega$$



$R(\Omega,\theta)$: R rotation de centre Ω et d'angle θ

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow z'=e^{i\theta}(z-z_\Omega)+z_\Omega$$



N.B : $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

En résumé :

La transformation	L'écriture complexe
La translation T de vecteur $\vec{u}$	$z'=z+z_{\vec{u}}$
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k	$z'=k(z-z_\Omega)+z_\Omega$
La rotation R de centre Ω et d'angle θ	$z'=e^{i\theta}(z-z_\Omega)+z_\Omega$