

Nombres complexes

EL KYAL MOHAMED

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \}$

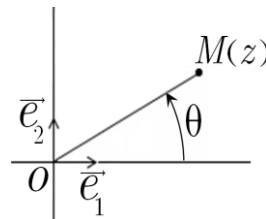
Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$

➤ Définition et propriétés :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$

- **La forme algébrique** du nombre complexe z est : $a + ib$.
- **La partie réelle** du nombre complexe z est : $\operatorname{Re} z = a$.
- **La partie imaginaire** du nombre complexe z est : $\operatorname{Im} z = b$.
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $\operatorname{Re} z = 0$.
- **Egalité** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' \text{ et } \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'image** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté M_z
- **L'affixe** du point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté z_M
- **L'affixe** du vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- **L'affixe** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- **L'argument** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}$ noté $\arg z$
 on a $\arg z \equiv \theta[2\pi]$
 $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \text{ et } \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$
- **La forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z est :

$$z = r \cos \theta + i \sin \theta = [r, \theta]$$
 avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$
 $[r, \theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r \cos \theta + i \sin \theta$
- **La forme exponentielle** du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$
 avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$



➤ Propriétés:

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\overline{-z} = -\overline{z}$	$ -z = z $	$\arg -z \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$
Conjugué	$\overline{\overline{z}} = z$	$ \overline{z} = z $	$\arg \overline{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$
Produit	$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$ z \times z' = z \times z' $	$\arg zz' \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n} = \overline{z}^n$	$ z^n = z ^n$	$\arg z^n \equiv n \arg z \ [2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \ [2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$
Somme	$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$		

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i\pi + i\theta}$
Conjugué	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Produit	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta + i\theta'}$
Puissance	$[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$	$re^{i\theta}{}^n = r^n e^{i n\theta}$
Inverse	$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i\theta - i\theta'}$

• $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ • $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ • $z\overline{z} = \left[\operatorname{Re} z\right]^2 + \left[\operatorname{Im} z\right]^2$ • $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$	• z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$ • z est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$
--	---

➤ Formule de Moivre :

$$\cos \theta + i \sin \theta^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

➤ Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

➤ Equations du second degré à coefficients réels :

L'équation :		Ensemble de solution:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

➤ Nombres Complexes et géométrie:

Notion complexe :	Relation géométrique :
$ z_B - z_A $	la distance AB
$ z - z_A = r \quad r > 0$	$AM = r$ - M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	$AM = BM$ - M appartient à la médiatrice de $[AB]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I milieu de $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A, B et C trois points alignés
$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right)$

➤ **Nature d'un triangle:**

	Nature du triangle ABC
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle isocèle et rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC est un triangle équilatéral

➤ **Ecritures complexes des transformations du plan:**

Transformations:	Ecriture complexe :
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre Ω ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre Ω ω et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

➤ **Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :**

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$

Soit $M' z'$ l'image d'un point $M z$ par une transformation F

L'expression complexe du transformation F	Nature du transformation F
$z' = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}^2$ $(a \neq 0)$	$a = 1$ F est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = b$
	$a \in \mathbb{R}^* - 1$ F est une homothétie de rapport a et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)
	$a \in \mathbb{C}^* - 1$ avec $ a = 1$ F est une rotation d'angle : $\theta \equiv \arg a \left[2\pi \right]$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)