

NOMBRES COMPLEXES

A) L'ensemble \mathbb{C} ; définition et vocabulaire

il existe un ensemble noté \mathbb{C} ses éléments s'appellent des nombres complexes qui vérifie : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$ et tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $z = a + ib$ où a et b réels
Le réel a s'appelle la partie réel de z ; on écrit : $a = Re(z)$
Le réel b s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $b = Im(z)$ et L'écriture : $z = a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z .

1) Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

2) L'ensemble des nombres complexes n'est pas ordonné.

3) l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est une partie de \mathbb{C}

$(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$ et $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

4) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de \mathbb{C} , s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $i\mathbb{R} = \{iy / y \in \mathbb{R}\}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$

5) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ (\subsetneq : inclus strictement)

6) On généralise les calculs dans \mathbb{C} s'effectuent de la même façon que sur \mathbb{R} seulement on remplace i^2 par -1 et on a :

a) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

b) $z^n = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ($z^n = z \times z \times \dots \times z$) n fois

c) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ d) $z^{n+m} = z^n \times z^m$ e) $z^{n-m} = z^n / z^m$

f) $z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \dots + z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$

g) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

h) $(z + z_1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z_1^{n-k}$ formule de binôme

Lorsque $Im(z) = 0$, z est réel.

Lorsque $Re(z) = 0$, $z = ib$ est appelé imaginaire pur.

B) L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe :

Le plan (\mathcal{P}) est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{u}, \vec{v})$ soit \mathcal{V}_2 le plan vectoriel associé à (\mathcal{P}) .

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan (\mathcal{P}) .

1) Le point $M(a, b)$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (\mathcal{P})

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point M

on écrit : $z = aff(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) Le vecteur \vec{u} s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (\mathcal{P}) et Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur \vec{u} on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

7) Le plan (\mathcal{P}) s'appelle un plan complexe

a) L'axe $(O; \vec{u})$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $(O; \vec{v})$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout ce qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O; \vec{u}, \vec{v})$

8) Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels et sont représentés sur l'axe des Réels.

9) Les complexes $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ sont des imaginaires purs et sont représentés sur l'axe des imaginaires purs.

10) Les opérations sur les affixes.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_2 ;

M et N deux points dans le plan (\mathcal{P}) et α un réel ; On a :

1) $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2) $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$

3) $aff(\alpha \vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$

4) $aff(\vec{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

5) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

6) pour 2 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ pour 3 points pondérés :

$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

7) Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

C) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Soient x et y deux réels et $z = x + iy$. Le conjugué du nombre z est le nombre complexe noté \bar{z} défini par : $\bar{z} = x - iy$. et les images de z et \bar{z} sont symétriques par rapport

à l'axe des réels.

2) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

a) si $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

b) $\bar{\bar{z}} = z$ c) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ d) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

e) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ f) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

g) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ h) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

k) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$ l) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

m) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ $n \in \mathbb{Z}$ n) $\bar{z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

D) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz}$ s'appelle le module du nombre complexe z

2) Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans \mathbb{N} on a :

$$1) |\bar{z}| = |-z| = |z| \quad 2) |z|^2 = z\bar{z} \quad 3) |z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$4) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad 5) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$6) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \text{ si } z \neq 0$$

$$7) |z^n| = |z|^n \text{ si } z \neq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z} \quad 8) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

8) si M est l'image du nombre complexe z alors $|z| = OM$

9) Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

E) forme trigonométrique et argument d'un complexe

1) Le plan complexe est menu d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}^*$ et $M(z)$ son image. L'argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On le note par $\arg(z)$

2) $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

$$a) z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z = \pi [2\pi] \quad b) z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z = 0 [2\pi]$$

c) $\arg(iz) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y > 0$ et $\arg(-iz) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y < 0$

d) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$ e) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$

3) Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i sin\theta)$ Où $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z

4) $z \in \mathbb{C}^*$ Si on a $z = r(cos\theta + i sin\theta)$ avec $r > 0$

Alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ on écrit : $z = [r, \theta]$

5) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

b) $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$$

c) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ et on a : $1/ [r, \theta] = [1/r, -\theta]$

d) $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

$$\text{et on a : } [r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$$

e) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$ et on a : $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

f) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$ et on a : $- [r, \theta] = [r, \pi + \theta]$

g) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ et on a : $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$

F) arguments et interprétations géométriques

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

$(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et Soient M et M' et A, B, C et D quatre points

distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

$$1) \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'} \right) \equiv \arg \left(\frac{z'}{z} \right) [2\pi] \quad 2) \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB} \right) \equiv \arg(b-a) [2\pi]$$

$$3) \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi] \quad 4) \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right) \equiv \arg \left(\frac{d-c}{b-a} \right) [2\pi]$$

5) $A(a), B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :

$$\arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \equiv 0 [2\pi]$$

6) $A(a), B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si :

$$\arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv 0 [2\pi] \quad \text{Ou} \quad \arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$7) (AB) \perp (CD) \text{ssi : } \arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.



G) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

NON NUL : Soit θ un réel on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\bar{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $(re^{i\theta})^n = (r^n) re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre)

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

H) LES EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS \mathbb{C} :

1) Les équations de second degré

Soit dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où sont des réels avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les

complexes $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ où δ une racine

carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

I) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que :

$\text{aff}(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$

si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation

$t_{\vec{u}}$ de vecteur \vec{u} tel que $\text{aff}(\vec{u}) = a$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k , admet une écriture complexe de la forme : $z' = kz + \omega(1 - k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{i\theta} + \omega$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage

