

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + \ln|e^x - 2|$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - Déterminer l'asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $-\infty$.

③ - a - Montrer que : $(\forall x \in]\ln 2; +\infty[): f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$.

b - Etudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

④ - a - Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{2(e^x - 1)}{e^x - 2}$.

b - Dresser le tableau de variations de f .

⑤ - Résoudre dans l'intervalle $] \ln 2; +\infty[$, l'équation : $f(x) = 0$.

⑥ - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $\ln 3$.

⑦ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,8$).

Exercice 2 :

1^{ère} partie :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = xe^x + e^x - 1$.

① - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

② - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h .

③ - a - Dresser le tableau de variations de h .

b - Calculer $h(0)$, puis déduire le signe de la fonction h .

2^{ème} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = xe^x - x + 1$.

① - Montrer que : $g'(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② - a - Etudier les variations de la fonction g .

b - Calculer $g(0)$, puis déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) - e^x = (x-1)(e^x - 1)$

b - Déduire que : $(\forall x \in [0; 1]) : g(x) \leq e^x$.

3^{ème} partie :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$.

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$. puis dresser le tableau de variation de f .

② - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(xe^x - x + 1)}{xe^x - x + 1} \left(e^x - 1 + \frac{1}{x} \right).$

b - Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) = x + \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x} \right).$

b - Etudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

④ - Calculer $f(1)$ puis tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

☺ 4^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1.$

② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

🐞 Exercice 3 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - x - 1.$

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .

② - a - Dédurre que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : g(x) > 0.$

b - Montrer que : $(\forall x > 0) : \frac{e^x - 1}{x} > 1$ et que : $(\forall x < 0) : \frac{e^x - 1}{x} < 1.$

③ - a - Montrer que : $g(-x) = e^{-x} [1 + (x-1)e^x].$

b - Dédurre que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 + (x-1)e^x \geq 0.$

☺ 2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x - 1 - \frac{x}{e^x - x - 1}.$

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$

② - Calculer : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

③ - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

④ - a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-2; -1[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]1; 2[.$

b - Dédurre que : $e^\alpha - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$

⑤ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}).$ (On prends $\alpha = -1,3$ et $\beta = 1,6$).

3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

- ① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.
- ② - Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- ③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 :

1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$.

- ① - a - Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .
b - Trouver les limites de g aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_g .
- ② - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, puis étudier les variations de la fonction g .
b - Dédire que : $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[) : g(x) > 0$.
- ③ - a - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -1; 0[$.
b - Dédire que le signe de g sur l'intervalle $] -1; 0[$.

2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \left| \frac{x+1}{x} \right|^x ; x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

- ① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .
- ② - a - Etudier la continuité de la fonction f en 0.
b - Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0 et interpréter le résultat géométriquement
- ③ - a - Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .
b - Etudier la dérivabilité de la fonction f sur D_f .
- ④ - a - Calculer : $(\forall x \in D_f) : f'(x)$.
b - Dresser le tableau de variations de f .
- ⑤ - Etudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .
- ⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .