

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + \ln|e^x - 2|$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - Déterminer l'asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $-\infty$.

③ - a - Montrer que : $(\forall x \in]\ln 2; +\infty[)$: $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$.

b - Etudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

④ - a - Montrer que : $(\forall x \in D_f)$: $f'(x) = \frac{2(e^x - 1)}{e^x - 2}$.

b - Dresser le tableau de variations de f .

⑤ - Résoudre dans l'intervalle $]\ln 2; +\infty[$, l'équation : $f(x) = 0$.

⑥ - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $\ln 3$.

⑦ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,8$).

Exercice 2 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = xe^x + e^x - 1$.

① - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

② - Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction h .

③ - a - Dresser le tableau de variations de h .

b - Calculer $h(0)$, puis déduire le signe de la fonction h .

☺ 2^{ème} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = xe^x - x + 1$.

① - Montrer que : $g'(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② - a - Etudier les variations de la fonction g .

b - Calculer $g(0)$, puis déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $g(x) > 0$.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $g(x) - e^x = (x - 1)(e^x - 1)$

b - Déduire que : $(\forall x \in [0; 1])$: $g(x) \leq e^x$.

☺ 3^{ème} partie :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$.

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$. puis dresser le tableau de variation de f .

② - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(xe^x - x + 1)}{xe^x - x + 1} \left(e^x - 1 + \frac{1}{x} \right)$.

b - - Calculer : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

③ - a - Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$: $f(x) = x + \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x} \right)$.

b - Etudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.

④ - Calculer $f(1)$ puis tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

☺ 4^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \leq u_n \leq 1$.

② - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

☒ Exercice 3 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - x - 1$.

① - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g .

② - a - Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $g(x) > 0$.

b - Montrer que : $(\forall x > 0)$: $\frac{e^x - 1}{x} > 1$ et que : $(\forall x < 0)$: $\frac{e^x - 1}{x} < 1$.

③ - a - Montrer que : $g(-x) = e^{-x} [1 + (x-1)e^x]$.

b - Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

☺ 2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x - 1 - \frac{x}{e^x - x - 1}$.

① - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

② - Calculer : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

③ - a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

④ - a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-2; -1[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]1; 2[$.

b - Déduire que : $e^\alpha - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.

⑤ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $\alpha = -1,3$ et $\beta = 1,6$).

☺ 3^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

①- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

☺ Exercice 4 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x+1}{x} \right|$.

① - a - Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

b - Trouver les limites de g aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_g .

② - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, puis étudier les variations de la fonction g .

b - Déduire que : $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[) : g(x) > 0$.

③ - a - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1; 0[$.

b - Déduire que le signe de g sur l'intervalle $]-1; 0[$.

☺ 2^{ème} partie :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \left| \frac{x+1}{x} \right|^x & ; x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f .

② - a - Etudier la continuité de la fonction f en 0.

b - Etudier la dérивabilité de la fonction f en 0 et interpréter le résultat géométriquement

③ - a - Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .

b - Etudier la dérивabilité de la fonction f sur D_f .

④ - a - Calculer : $(\forall x \in D_f) : f'(x)$.

b - Dresser le tableau de variations de f .

⑤ - Etudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .