



## I. Bac 2014 session de rattrapage

On considère  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (xe^x - 1)e^x$ .

et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 2 cm).

1. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ; puis interpréter géométriquement le résultat. (0,75)

2. ..

a. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . (0,75)

b. En déduire que : la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera sa direction. (0,5)

3. ..

a. Montrer que :  $f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2xe^x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis vérifier que  $f'(0) = 0$ . (1)

b. Montrer que  $e^x - 1 \geq 0$  pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  et que  $e^x - 1 \leq 0$  pour tout  $x$  de  $]-\infty, 0]$ . (0,5)

c. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et la fonction  $f$  est décroissante sur  $]-\infty, 0]$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (1,25)

4. ..

a. Montrer que l'équation :  $f(x) = x$  admet une solution unique sur  $[0; +\infty[$   $\alpha$  tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  (on admettra que  $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$ ). (0,75)

b. Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (on admettra que la courbe de  $f$  possède un point d'inflexion, on ne le déterminera pas). (0,75)

5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$ . (0,75)

6. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et les droites

d'équations  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{2}$ . (1)

## II. Bac 2015 session normale ( sujet qui a été refait )

1. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x - 2x$ .

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis en déduire que la fonction  $g$  est décroissante sur  $]-\infty, \ln 2]$  et la fonction  $f$  est croissante sur  $[\ln 2, +\infty[$ . (0,75)

2. Vérifier que :  $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$  puis déterminer le signe de  $g(\ln 2)$ . (0,5)

3. En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ . (0,5)

II. Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ .

Et soit  $(C_g)$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 1 cm)

1.



**a.** ..Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$  ( on remarquera  $e^x - 2x = x \left( \frac{e^x}{x} - 2 \right)$  ) pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  ..... ( 1 )

**b.** Interpréter géométriquement les deux résultats . ..... ( 0,5 )

**2.** ..

**a.** Montrer que :  $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$  . pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  ..... ( 0,75 )

**b.** Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  . ( 0,75 )

**c.** Montrer que :  $y = x$  est l'équation de la droite  $(T)$  tangente à la courbe  $(C_f)$  au point  $O$  origine du repère . ..... ( 0,75 )

**3.** Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( on prend  $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$  et on admettra que la courbe de  $f$  admet deux points d'inflexions l'une a pour abscisse appartient à  $]0,1[$  et l'autre a pour abscisse supérieure à  $\frac{3}{2}$  ) ..... ( 0,75 )

**4.** ..

**a.** Montrer que :  $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$  pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  ..... ( 0,75 )

**b.** A l'aide d'une intégration par partie montrer que  $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$  ..... ( 0,75 )

**c.** Soit en  $\text{cm}^2$   $A(E)$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  .  
montrer que  $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$  ..... ( 0,75 )

**III.** Soit la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty, 0]$  par :  $h(x) = f(x)$  .

**1.** Montrer que la fonction  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera . ..... ( 0,5 )

**2.** Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(C_{h^{-1}})$  de la fonction  $h^{-1}$  . ..... ( 0,5 )

**IV.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = -2$  et  $u_{n+1} = h(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**1.** Montrer par récurrence que :  $u_n \leq 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  . ..... ( 0,5 )

**2.** Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante ( on remarquera graphiquement que  $h(x) \geq x$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-\infty, 0]$  ) . ..... ( 0,75 )

**3.** En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  . ..... ( 0,75 )

## 3. Bac 2016 session normale

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$  .

et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ) .

**I.** ..

**1.** ..



a. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  . ..... ( 0, 25 )

b. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à la courbe au voisinage de  $-\infty$  ( 0, 5 )

2. ..

a. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  . ..... ( 0, 5 )

b. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat . ..... ( 0, 5 )

3. ..

a. Montrer que :  $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  . ..... ( 0, 5 )

b. dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  . ( remarquer que  $f'(0) = 0$  ) . ..... ( 0, 25 )

c. montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  de l'intervalle  $[\ln 4; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 0$  . ..... ( 0, 75 )

4. ..

a. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  est située au dessus de la droite  $(D)$  sur l'intervalle  $[\ln 4; +\infty[$  est au dessous de la droite  $(D)$   $[\ln 4; +\infty[$  sur l'intervalle  $]-\infty; \ln 4[$  . ..... ( 0, 5 )

b. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet un point d'inflexion unique de coordonnées  $(0, -5)$  . ..... ( 0, 5 )

c. Construire la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( on prend  $\ln 4 \approx 1,4$  et  $\alpha \approx 1,3$  ) . ..... ( 0, 75 )

5. ..

a. Montrer que :  $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$  . ..... ( 0, 5 )

b. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$  et l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \ln 4$  . ..... ( 0, 75 )

II. ..

1. ..

a. Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' - 3y' + 2y = 0$  . ..... ( 0, 5 )

b. Déterminer la solution  $g$  de l'équation  $(E)$  vérifiant  $g(0) = -3$  et  $g'(0) = -2$  . ..... ( 0, 5 )

2. Soit  $h$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[\ln 4; +\infty[$  par  $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$  .

a. Montrer que : la fonction  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  et que  $h^{-1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  . .... ( 0,75 )

b. Vérifier que :  $h(\ln 5) = \ln 5$  puis déterminer  $(h^{-1})'(\ln 5)$  . ..... ( 0,75 )

## 4. Bac 2017 session de rattrapage

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$ .

I. ..

1. Vérifier que :  $g(0) = 0$  . ..... ( 0,25 )

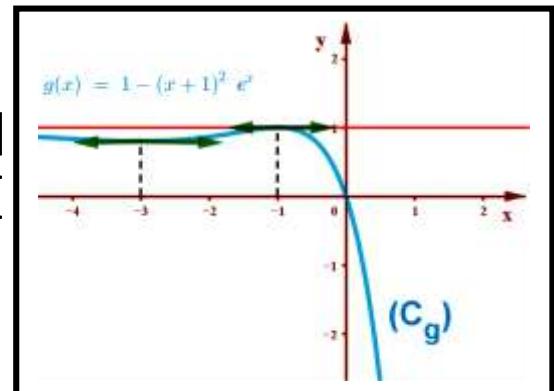


2. A partir de la courbe représentative  $(C_g)$  de la fonction  $g$

(voir figure ci-contre) : ..... (1)

• Montrer que :  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x$  appartenant à  $]-\infty, 0]$

• Montrer que :  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x$  appartenant à  $[0, +\infty[$



III. On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$ .

Et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 2 cm).

1. ..

a. Vérifier que :  $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis en déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . ..... (0,75)

b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$  en déduire que : la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 1$  est une asymptote à la courbe  $(C_f)$  au voisinage  $-\infty$ . ..... (0,5)

c. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  est en dessous de la droite  $(D)$ . ..... (0,25)

2. ..

a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  (on pourra écrire  $f(x)$  sous la forme  $x \left[ 1 + \frac{1}{x} - \left( x + \frac{1}{x} \right) e^x \right]$ ) (0,5)

b. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet, au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction. ..... (0,25)

3. ..

a. Montrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ . ..... (0,75)

b. Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty, 0]$  et la fonction  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . ..... (0,75)

c. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet deux points d'inflexion d'abscisses  $-3$  et  $-1$ . ..... (0,75)

4. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_f)$  (on prend  $f(-3) \approx -2,5$  et  $f(-1) \approx -0,75$ ). ..... (1)

5. ..

a. Vérifier que :  $H : x \mapsto (x-1)e^x$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \mapsto xe^x$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . puis montrer que  $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$ . ..... (0,5)

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que  $\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$ . ..... (0,75)



c. Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$ , et l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = -1$  . ..... (0,5)

## 5. BAC 2018 SESSION NORMALE

Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$ .

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction  $g$ :

**I.** ..

1. Vérifier que :  $g(0) = 0$  . ..... (0,25)

2. Déterminer le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles

$]-\infty, 0]$  et  $[0, +\infty[$  . ..... (0,5)

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		$+\infty$

**II.** Soi la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$  .

Et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 1 cm).

**1.** ..

a. Vérifier que :  $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  . .... (0,5)

b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ , en déduire que: la courbe  $(C_f)$  admet une asymptote  $(D)$  au voisinage  $+\infty$  d'équation  $y = x$  . ..... (0,75)

c. Vérifier que :  $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  . ..... (0,5)

d. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  et interpréter le résultat géométriquement . ..... (0,5)

**2.** ..

a. Montrer que :  $f(x) - x$  et  $x^2 - x$  ont le même signe pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  . ..... (0,25)

b. En déduire que :  $(C_f)$  est au dessus de  $(D)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0]$  et  $[1, +\infty[$  et en dessous de  $(D)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  . ..... (0,5)

**3.** ..

a. Montrer que :  $f'(x) = g(x)e^{-x}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  . ..... (0,75)

b. En déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur  $]-\infty, 0]$  et la fonction  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  . ..... (0,5)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  . ..... (0,25)

**4.** ..

a. Vérifier que :  $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  . ..... (0,25)

b. En déduire que : la courbe  $(C_f)$  admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4 . (0,5)

**5.** Construire  $(D)$  et  $(C_f)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (on prend  $f(4) \approx 4,2$ ) . ..... (1)



6.

a. Vérifier que :  $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$  . puis en déduire que  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$  . ..... ( 0,5 )

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que  $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$  . ..... ( 0,75 )

c. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(C_f)$  et  $(D)$  et le droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  . ..... ( 0,75 )

III. Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

- Montrer par récurrence que :  $0 \leq u_n \leq 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ( on pourra utiliser le résultat de la question II 3 ) b- ). ..... ( 0,75 )
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante . ..... ( 0,5 )
- En déduire que  $(u_n)$  est convergente .et déterminer sa limite. ..... ( 0,75 )

## 6. Bac 2019 session de rattrapage

### Première Partie :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$ .

et  $(C_f)$  a courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité 1 cm ).

1. ..

a. vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  puis interpréter le résultat géométriquement . ..... ( 0,5 )

b. vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  puis interpréter le résultat géométriquement . ..... ( 0,5 )

2. ..

a. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  . ..... ( 0,5 )

b. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admettra une branche parabolique de direction l'asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$  . ..... ( 0,5 )

3. ..

a. Montrer que : pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$   $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2 - 2x + 4)e^{x-4}}{x^3}$  . ..... ( 0,75 )

b. Vérifier que : pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $x^2 - 2x + 4 > 0$  . ..... ( 0,25 )

c. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 2]$  et strictement croissante sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $[2, +\infty[$  . ..... ( 0,75 )

d. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  . ..... ( 0,5 )

4. Construire la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . ..... ( 1 )

5. ..



a. Vérifier que : la fonction  $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$  sur l'intervalle  $[2, 4]$  . ..... ( 0,5 )

b. Vérifier que :  $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$  . ..... ( 0,25 )

c. Calculer l'intégral :  $\int_2^4 e^{x-4} dx$  ..... ( 0,5 )

d. Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$  . ..... ( 0,75 )

**Deuxième Partie :**

1. On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[2, 4]$  par :  $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$  .

a. Calculer :  $g(4)$  . ..... ( 0,25 )

b. Vérifier que : pour tout  $x$  de  $[2, 4]$  :  $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$  . ..... ( 0,5 )

c. Vérifier que : pour tout  $x$  de  $[2, 4]$  :  $e^{x-4} - 1 \leq 0$  puis en déduire que pour tout  $x$  de  $[2, 4]$  :  $g(x) \leq 0$  ..... ( 0,5 )

2. ..

a. Vérifier que : pour tout  $x$  de  $[2, 4]$  :  $f(x) - x = \frac{x-2}{x^2} g(x)$  . ..... ( 0,5 )

b. En déduire que : pour tout  $x$  de  $[2, 4]$  ,  $f(x) \leq x$  . ..... ( 0,25 )

3. Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

a. Montrer par récurrence que : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $2 \leq u_n \leq 4$  . ..... ( 0,5 )

b. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$  , puis en déduire que  $(u_n)$  est convergente . ..... ( 0,5 )

c. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  . ..... ( 0,75 )