



1 Fonction exponentielle népérien

Définition

La fonction logarithme népérien on note **ln** est la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Résultats:

♠ $x \rightarrow \ln(x)$ est défini et continu sur l'intervalle $]0; +\infty[$

♠ $x \rightarrow \ln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$; et on a $\forall x \in]0; +\infty[$; $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

♠ $x \rightarrow \ln(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ car $\forall x \in]0; +\infty[$; $\frac{1}{x} > 0$

♠ Signe de la fonction **ln**:

$$* \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad * \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad * \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0

propriétés

$$(\forall a > 0); (b > 0); (r \in \mathbb{Q}^*)$$

$$* \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$* \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$$

$$* \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$* \ln(a^r) = r \times \ln(a)$$

$$(\forall xy > 0)$$

$$* \ln(x \times y) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$$

$$* \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(|x|) - \ln(|y|)$$

$$(\forall x > 0); (\forall y > 0))$$

$$* \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$* \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

2 Étude de la fonction \ln .

2.1 Limites usuelles et Les Branches infinies

propriétés

♣ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ Donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'axe des ordonnées est une asymptote verticale} \\ \text{à la courbe de la fonction } \ln \end{array} \right.$

♣ On a $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\}$ Donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{la courbe de la fonction } \ln \text{ admet une} \\ \text{branche parabolique de direction l'axe} \\ \text{des abscisses au voisinage de } +\infty \end{array} \right.$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 ; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 ; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$$

2.2 Tableau de variation de la fonction \ln .

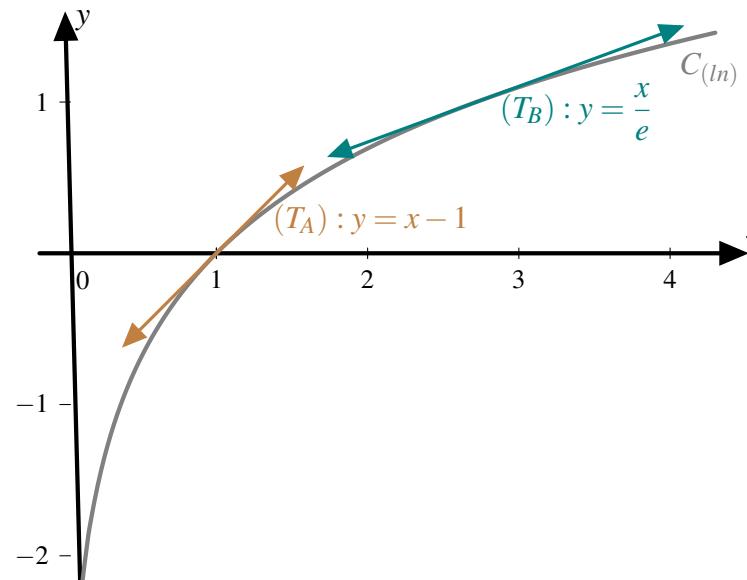
x	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))'$		+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2.3 Construction de la courbe de fonction \ln .

Conséquences

♣ La tangente (T_A) à la courbe de la fonction \ln au point $A(1; 0)$ a pour équation: $y = x - 1$

♣ La tangente (T_B) à la courbe de la fonction \ln au point $B(e; 1)$ a pour équation: $y = \frac{1}{e}x$



2.4 Dérivée de la fonction logarithmique

Propriété:1

Si g est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln|g(x)|$ est dérivable sur I et on a : $((\forall x \in I); \ln(|g(x)|)' = \frac{g(x)'}{g(x)})$

Propriété:2

Si g est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$, Les primitives de la fonction $:x \mapsto \frac{g(x)'}{g(x)}$ sont les fonction $x \mapsto \ln|g(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$

2.5 Fonction logarithmique de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition

La fonction logarithme de base a noté \log_a est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Conséquences

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)}$
- $\log_a(1) = 0$
- $((\forall x \in]0; +\infty[); \log_e(x) = \ln(x))$

Propriétés

$(\forall x; y \in]0; +\infty[)$ et $(a > 0$ et $a \neq 1)$ On a:

- | | |
|--|---|
| * $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ | * $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ |
| * $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ | * $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$ |