

Fonction exponentielle

I) Fonction exponentielle népérienne.

Activité :

1) Montrer que la fonction **ln** admet une fonction réciproque définie sur **IR**.

Définition : La fonction réciproque de la fonction **ln** est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle népérienne** ou **naturelle** et se note **exp** . donc $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$

2) Calculer **exp(0)** et **exp(1)**.

$$e \approx 2,7182818284 59045235$$

3) déduire que la fonction **exp** est continue , dérivable et strictement croissante sur **IR**.

4) Etudier le signe de la fonction **exp** sur **IR**.

5) En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels on a :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) ; \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b} \text{ et } \exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$$

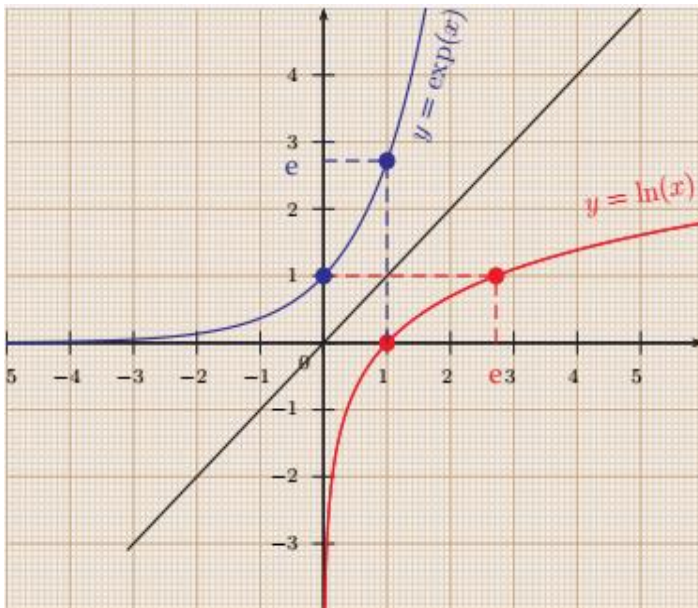
6) Tracer la courbe de la fonction **exp** dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x}$.

8) Déterminer $\exp'(x)$ et $(\exp(u(x)))'$ tel que u une fonction dérivable .

9) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\exp})$ au point $B(0;1)$.

10) Montrer que $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \exp(r) = e^r$.



Définition :

On appelle fonction **exponentielle**, la fonction réciproque de la fonction **logarithme** népérien. L'image d'un réel x par la fonction **exponentielle** est notée e^x

Conséquences

La fonction **exp** est définie, **continue** et **dérivable** sur **IR**, et pour tout réel on a :

$$\exp(x) = e^x \text{ et } (e^x)' = e^x.$$

- Le nombre **e** est un nombre irrationnel tel que:
- Si u est dérivable sur I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- $e^{\ln b} = b$ avec $b > 0$

Equations et inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- $e^x > 0$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

Limites ($n \in \mathbb{N}^*$)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Corollaire : Si u est une fonction dérivable sur I , alors la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle.

II) Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition : La fonction réciproque de la fonction $\log_a$ est une fonction définie sur **IR** est appelée la fonction **exponentielle de base a** et se note $\exp_a$ tel que : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \exp_a'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) \cdot e^{x \ln a} = (\ln a) \cdot a^x$

Remarques : $\exp_e(x) = e^x$; $\log_e(x) = \ln x$; $\log_a(a) = 1$; $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (changement de base)