Les fonctions exponentielles

Prof. Smail BOUGUERCH

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérien, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur $\mathbb{R}$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \succ 0$ $\ln e^x = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$; $\left(r \in \mathbb{Q}\right)$ $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ • $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \left]0;+\infty\right[$ • $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\right\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)}}{\left[u(x)\right]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^{x}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

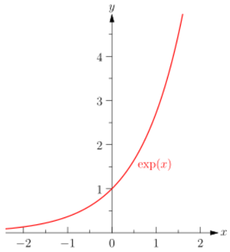
La fonction $x \mapsto e^{x}$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \ ; \ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base **a**, notée : a^{x} , est la réciproque de $\log_{a}$

Déductions et propriétés:

<table>
<tr><td>$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^{x} = e^{x \ln a}$
$\log_{a}(a^{x}) = x$</td><td rowspan="4">$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$
$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$
$\left(a^{x}\right)^{r} = a^{rx}$
$\dfrac{1}{a^{x}} = a^{-x}$
$\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$</td></tr>
<tr><td>$\forall x \in]0;+\infty[\ a^{\log_{a} x} = x$</td></tr>
<tr><td>$a^{x} = a^{x} \Leftrightarrow x = y$</td></tr>
<tr><td>$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in]0;+\infty[$
$a^{x} = y \Leftrightarrow x = \log_{a} y$</td></tr>
</table>

Limites et inéquations:

<table>
<tr><th>$a \succ 1$</th><th>$0 \prec a \prec 1$</th></tr>
<tr><td>$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \succ y$</td><td>$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \prec y$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = 0$</td><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$</td></tr>
</table>

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\log_{a} x)' = \frac{1}{x \ln a}$$