I. La fonction exponentielle népérienne $f(x)=e^x$:

a. Activité :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x)=\ln x \end{cases}$

1. Est-ce que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} ?

b. Vocabulaire et notation :

fonction réciproque f^{-1} de f est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle , on note $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$.

c. Définition et propriété :

La fonction f définie par : $\begin{cases} f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x)=\ln x \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ d'où f admet une fonction réciproque f^{-1}, on l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par : $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$ avec $\begin{matrix} f^{-1}=\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[\\ x \mapsto f^{-1}(x)=\exp(x) \end{matrix}$.

d. Conséquences :

- La fonction exponentielle népérienne $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la courbe de f et f^{-1} .sont symétrique par rapport à la 1ière bissectrice (la droite d'équation $(D) : y=x$
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)>0$.
- Relation entre $f(x)=\ln(x)$ et $f^{-1}(x)=\exp(x)$ est $\left.\begin{matrix}\exp(x)=y \\ x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ y>0 \end{cases}$.
- On a : $\forall x\in]0,+\infty[: f^{-1}\circ f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=x$ donc
  $\forall x\in]0,+\infty[$, $\exp\circ\ln(x)=x \Leftrightarrow \exp(\ln(x))=x$
- On a : $\forall x\in\mathbb{R} : f\circ f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=x$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln\circ\exp(x)=x \Leftrightarrow \ln(\exp(x))=x$

e. Nouvelle notation :

On sait que : (1) : $\forall r\in\mathbb{Q}$, $r=\ln(e^r)$ d'ou

$(1) \Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}$, $\exp(r)=\exp(\ln(e^r)) \Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}$,$\exp(r)=e^r$

On obtient : $\forall r\in\mathbb{Q} : \exp(r)=e^r$ par conséquence on va prolonger ce résultat à tous les nombres réels x.

d'où la nouvelle notation : $\forall x\in\mathbb{R} : \exp(x)=e^x$.

Donc : $\begin{matrix} f^{-1}=\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[\\ x \mapsto f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x \end{matrix}$

f. Propriétés :

1. $\left.\begin{array}{l} y=e^{x} \\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\ln y \\ y>0\end{array}\right.$ et $\forall x>0 : e^{\ln x}=x$ et $\forall x\in\mathbb{R} : \ln\left(e^{x}\right)=x$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x}>0$.
2. $\forall a,b\in\mathbb{R} : a=b\Leftrightarrow e^{a}=e^{b}$ et $\forall a,b\in\mathbb{R} : a<b\Leftrightarrow e^{a}<e^{b}$.

g. Exemples :

1. $e^{x}-3=0\Leftrightarrow e^{x}=3$
   $\Leftrightarrow x=\ln 3$
2. $e^{\ln(24)}=24$ et $\ln\left(e^{-13}\right)=-13$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $e^{x+3}=e^{2x+7}$.
   On a : $e^{x+3}=e^{2x+7}\Leftrightarrow x+3=2x+7\Leftrightarrow x-4$
   Ensemble des solutions de l'équation est $S=\{-4\}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x+1}<e^{6x-2}$.
   On a : $e^{x+1}<e^{6x-2}\Leftrightarrow x+1<6x-2$
   $\Leftrightarrow -5x<-3$
   $\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{5}$
   $\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{3}{5},+\infty\right[$
   Ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]\dfrac{3}{5},+\infty\right[$.
5. Ensemble de définition des fonctions : $f(x)=\dfrac{2}{e^{x}}$ et $g(x)=\sqrt{e^{x}}$
   - $x\in D_f\Leftrightarrow e^{x}\neq 0$ ceci est vrai quelque soit x de $\mathbb{R}$ car $e^{x}>0$ donc $D_f=\mathbb{R}$.
   - $x\in D_f\Leftrightarrow e^{x}\geq 0$ on sait quelque soit x de $\mathbb{R}$ on a $e^{x}>0$ donc $D_f=\mathbb{R}$.

II. Propriétés algébriques :

a. Propriétés :

Soient a et b et x de $\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{Q}$ on a :

propriétés	Exemples		propriétés	Exemples	
$e^{a+b}=e^{a}\times e^{b}$	$e^{7}=e^{4}\times e^{3}$	1	$\left(e^{x}\right)^{r}=e^{rx}$ $(r\in\mathbb{Q})$	$\left(e^{x}\right)^{3}=e^{3x}$	4
$e^{-b}=\dfrac{1}{e^{b}}$	$e^{-2}=\dfrac{1}{e^{2}}$	2	$\sqrt{e^{x}}=e^{\frac{1}{2}x}$	$\sqrt{e^{x-3}}=e^{\frac{1}{2}(x-3)}$	5
$e^{a-b}=\dfrac{e^{a}}{e^{b}}$	$e^{5}=\dfrac{e^{7}}{e^{2}}$	3	$\sqrt[3]{e^{x}}=e^{\frac{1}{3}x}$	$\sqrt[3]{e^{2+2x}}=e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$	6

b. Preuve : pour $e^{a+b}=e^a\times e^b$.

On pose : $A=e^{a+b}$ et $B=e^a\times e^b$

On a :

$$A=e^{a+b}\Leftrightarrow \ln(A)=\ln\left(e^{a+b}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(A)=a+b \quad ,\quad (1)$$

Et : $B=e^a\times e^b\Leftrightarrow \ln(B)=\ln\left(e^a\times e^b\right)$
$$\Leftrightarrow \ln(B)=\ln\left(e^a\right)+\ln\left(e^b\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B)=a+b \quad ,\ (2)$$

D'après (1) et (2) on obtient : $\ln(A)=\ln(B)$ donc $A=B$ c.à.d. $e^{a+b}=e^a\times e^b$.

Conclusion : $e^{a+b}=e^a\times e^b$.

c. Remarques :

- $e^x\times e^x=\left(e^x\right)^2=e^{2x}$ et $e^x\times e^x\times e^x=\left(e^x\right)^3=e^{3x}$.
- $\underbrace{e^x\times e^x\times\cdots\times e^x}_{n}=\left(e^x\right)^n=e^{nx}$.
- $f(x)=e^{u(x)}$, $x\in D_f\Leftrightarrow x\in D_u$

III. Limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to-\infty}x\times e^x=0^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\times e^x=0$; $n\in\mathbb{N}^*$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$; $n\in\mathbb{N}^*$	

a. Exemple :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$:

1$^{\text{ère}}$ méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\times e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\times e^x=+\infty$.

2$^{\text{ième}}$ méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}\left(t=2x\ ;\ x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty\right)$$
$$=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2x}{x^3}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$)

IV. Dérivée de la fonction $f(x)=e^x$ et $f(x)=e^{u(x)}$.

a. Théorème :

la fonction $f(x)=e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$.

b. Preuve :

On pose : $f(x)=\ln(x)$ et $f^{-1}(x)=\exp(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ donc sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ (e^x)'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\frac{1}{f'(e^x)}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x .$$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$.

c. Théorème :

Si la fonction $u(x)$ est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivable est $f'(x)=\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$.

d. Exemple :

Soit la fonction $f(x)=e^{5x^3+3x}$

On a : $f'(x)=\left[e^{5x^3+3x}\right]'=(5x^3+3x)'\times e^{5x^3+3x}=(15x^2+3)e^{5x^3+3x}$.

e. Remarque :

Les fonctions primitives de la fonction $g(x)=u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $G(x)=e^{u(x)}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.

f. Exemple :

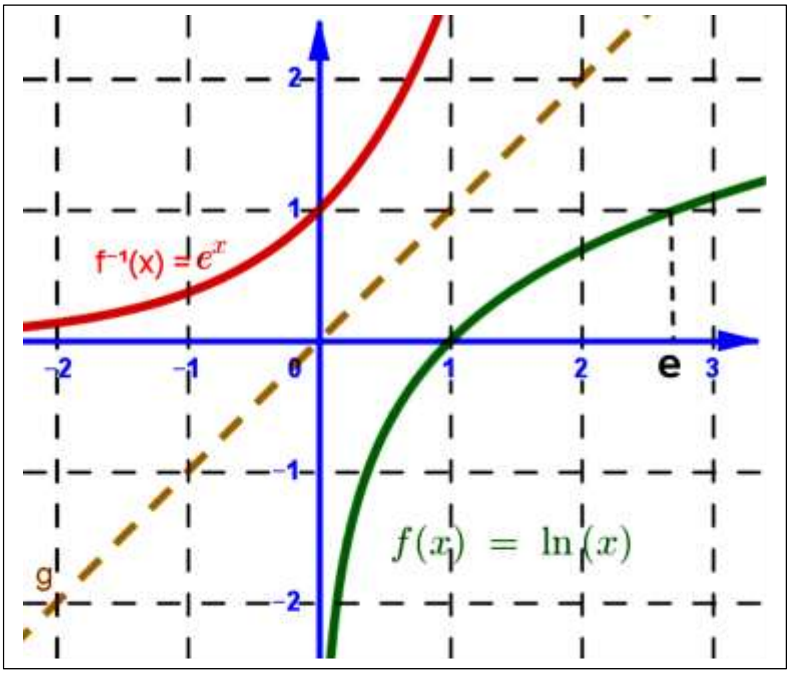
On détermine les primitives de la fonction $f(x)=x.e^{3x^2+1}$ sont les fonctions de la forme $F(x)=\dfrac{1}{6}e^{3x^2+1}+c$

V. Etude de la fonction $f(x)=e^x$:

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f'	$+$
f	0 $\nearrow$ $+\infty$

La courbe représentative de f



VI. Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

a. Définition :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

La fonction définie par : $\forall x > 0$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}, on l'appelle fonction exponentielle de base a et définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to]0,+\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \exp_a(x) \end{aligned}.$$

b. Nouvelle notation :

- On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \log_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \\ &\Leftrightarrow y = e^{x\ln(a)} \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(x) = \exp_a(x) = e^{x\ln a}$

- On prend $x = r \in \mathbb{Q}$ on a : $f^{-1}(r) = \exp_a(x) = e^{r\ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$ d'où : $\exp_a(x) = a^r$.
- On prolonge cette écriture pour tous les nombres réels x de $\mathbb{R}$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = e^{x\ln a} = a^x$.

• **Conclusion :**

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x\ln a} = a^x$.

c. Exemple :

$5^x = e^{x\ln 5}$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x\ln 5}$ et $10^x = e^{x\ln 10}$.

d. Remarques :

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\log_a\left(a^x\right) = x$.

• Pour tout $x > 0$ on a : $a^{\log_a(x)} = x$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $10^x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{Log}(y)$.

e. Conséquences :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et la fonction $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

1. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
2. $[f(x)]' = \left(a^x\right)' = \left(\ln(a)\right) \times e^{x\ln a} = \left(\ln(a)\right) \times a^x$.
3. D'où le signe : $[f(x)]' = \left(a^x\right) = \left(\ln(a)\right) \times a^x$ est le signe de $\ln a$.
   - $0 < a < 1$ alors $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ strictement croissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.
   - $a > 1$ alors $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ strictement décroissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.

f. Propriétés :

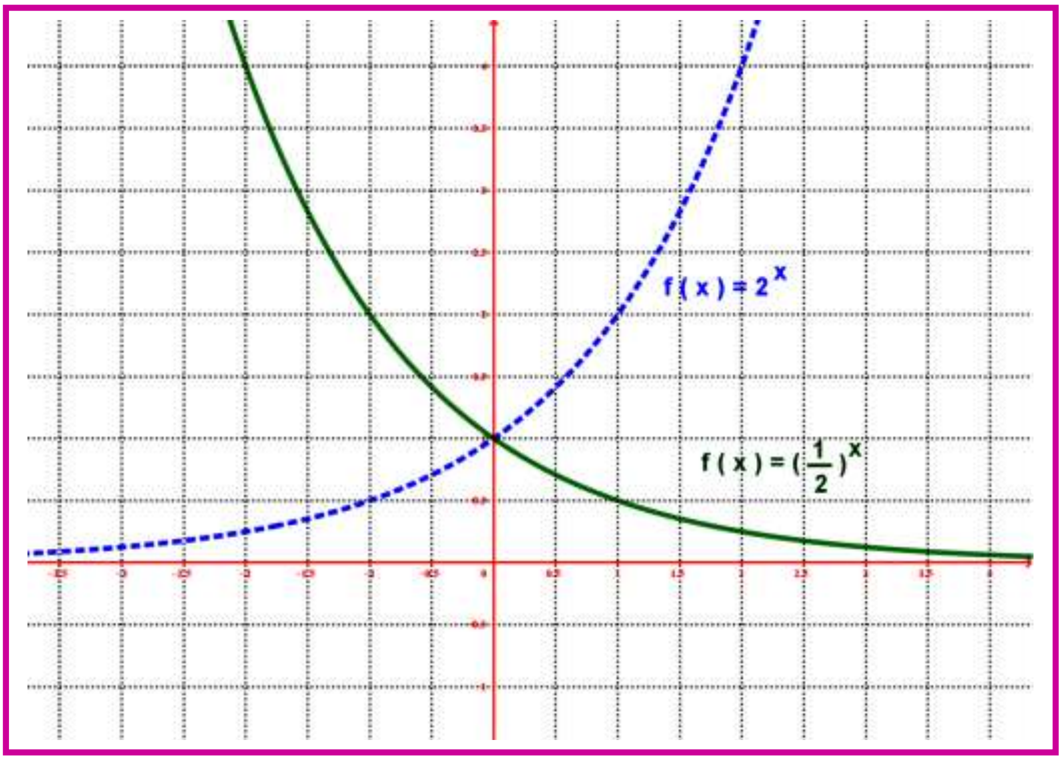
$a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ on a :

$a^x \times a^y = a^{x+y}$ et $\left(a^x\right)^y = a^{x\times y}$ et $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ et $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

g. La courbe représentative de $f(x) = a^x$ **avec** $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Cas $0 < a < 1$ on prend $a = \frac{1}{2}$ donc $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Cas $a > 1$ on prend $a = 2$ donc $f(x) = 2^x$.



h. Exemple :

1. Ecrire la fonction $f(x)=3^{x^3-x}$ en fonction de la fonction exponentielle népérienne .
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Calculer : f ' la fonction dérivée de f .

Correction :

1. **On écrit la fonction f :**

On a : $f(x)=3^{x^3-x}=e^{(x^3-x)\ln 3}$.

2. Les limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x^3-x)\ln 3}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x)\ln 3=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(x^3-x)\ln 3}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x)\ln 3=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0$.

3. Dérivée :

On a : $d=f'(x)=\left(e^{(x^3-x)\ln 3}\right)'=\left((x^3-x)\ln 3\right)'\times e^{(x^3-x)\ln 3}=\left((3x^2-1)\ln 3\right)\times e^{(x^3-x)\ln 3}$.