

Les Nombres Complexes



1 Introduction

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} ; i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$; $\mathbb{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}; x + iy\}$

Les trois types d'écriture d'un nombres complexes Z:

♣ **écriture algébrique:** $Z = x + iy$

$\hookrightarrow x = \text{Re}(Z)$ est partie réel de nombre complexe Z ;

$\hookrightarrow y = \text{Im}(Z)$ est partie imaginaire de nombre complexe Z ;

♣ **écriture trigonométrique:** $Z = |Z| \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ ou $Z = [|Z|; \theta]$

$\hookrightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Z\bar{Z}}$; $\bar{Z} = x - iy$; (\bar{Z} est le conjugué de Z)

$\hookrightarrow \arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$

$\hookrightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{|Z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{|Z|}$

♣ **écriture exponentielle:** $Z = |Z| \cdot e^{i\theta}$

$\hookrightarrow e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

propriétés

Les Règles de conjugué

$$* \overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$$

$$* \overline{ZZ'} = \bar{Z}\bar{Z}'$$

$$* \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'} / Z' \neq 0$$

$$* \bar{Z}^n = (\bar{Z})^n / n \in \mathbb{N}^*$$

Propriété de modulo

$$* |ZZ'| = |Z||Z'|$$

$$* \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$$

$$* |Z^n| = |Z|^n; n \in \mathbb{N}^*$$

$$* |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

Propriété d'argument

$$* \arg(ZZ') \equiv \arg(Z) + \arg(Z')[2\pi]$$

$$* \arg(\bar{Z}) \equiv -\arg(Z)[2\pi]$$

$$* \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv \arg(Z) - \arg(Z')[2\pi]$$

$$* \arg\left(\frac{1}{Z}\right) \equiv -\arg(Z)[2\pi]$$

$$* \arg(Z^n) \equiv n \times \arg(Z)[2\pi] / n \in \mathbb{N}^*$$

Propriété sur la formule trigonométrique $Z = [|Z|; \alpha]$ et $Z' = [|Z'|; \alpha']$

$$* Z \times Z' = [|Z||Z'|; \alpha + \alpha']$$

$$* Z^n = [|Z|^n; n \times \alpha]$$

$$* \frac{Z}{Z'} = \left[\frac{|Z|}{|Z'|}; \alpha - \alpha' \right]$$

Propriété sur l'écriture exponentielle $Z = r.e^{i\alpha}$ et $Z' = r'.e^{i\alpha'}$

$$* Z \times Z' = rr'.e^{i(\alpha+\alpha')}$$

$$* Z^n = r^n.e^{i(n \times \alpha)}$$

$$* \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}.e^{i(\alpha-\alpha')}$$

2 Formule d'Euler ,Formule de Moivre

propriétés

♣ Formule d'Euler: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{N}$)

♣ Formule de Moivre: $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3 Interprétation géométrique

A , B et C des points dans le plan complexe avec d'affixe respectivement Z_A, Z_B et Z_C

$$\overrightarrow{AB} = Z_B - Z_A \quad ; \quad AB = |Z_B - Z_A| \quad ; \quad \left(\widehat{AB, AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right) [2\pi]$$

$$A, B \text{ et } C \text{ des points alignés} \Leftrightarrow \left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right) \in \mathbb{R}$$

4 L'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ avec a, b et c des réel $a \neq 0$

Propriétés

le discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

* Si $\Delta > 0$: $Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

* Si $\Delta < 0$: $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

* Si $\Delta = 0$: $Z = \frac{-b}{2a}$

5 l'ensemble des points $M(Z)$

Propriétés

Algébriquement	Géométriquement	L'ensemble des points $M(z)$
$ Z_M - Z_A = Z_M - Z_B $	$AM = BM$	(Δ) est médiatrice de $[AB]$
$ Z_M - Z_A = R$	$AM = R$	
Z est un nombre réel		
Z est un nombre imaginaire pur		