

Lycée Ibn Khaldoun BOUZNKA	Résumé des nombres complexes	AGOUZAL
Année scolaire : 2019 – 2020		2 BPCF

Forme algébrique $i^2 = -1$

$z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$\text{Re}(z) = a$ et $\text{Im}(z) = b$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

Forme trigonométrique :

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ $r > 0$

$z = [r; \theta]$ $r > 0$

Forme exponentielle :

$z = re^{i\theta}$ $r > 0$

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = [1; \theta]$

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$$

Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Conjugué d'un complexe

$$z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \text{ est réel}$$

$$[r, \theta] = [r, -\theta] \quad r > 0$$

$$-[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi] \quad Z_A \neq Z_B$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi] \quad Z_A \neq Z_B$$

$$z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} \Leftrightarrow I \text{ milieu de } [AB] \quad \text{aff}(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés } (A \neq B)$$

Nature d'un triangle

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow ABC \text{ rectangle et isocèle en } A$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow ABC \text{ triangle équilatéral}$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = [1; \theta] \Leftrightarrow ABC \text{ triangle isocèle en } A \quad \vec{u}$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2}\right] ; r > 0 \Leftrightarrow ABC \text{ rectangle en } A$$

Représentation complexe

M, M', Ω et $\vec{u}$ d'affixes respectives z, z', ω et a

$$\text{Translation } t_{\vec{u}} : t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + a$$

$$\text{Homothétie } h(\Omega, k) : h(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$\text{Rotation } R(\Omega, \theta) : R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Orthogonalité de deux droites

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

L'ensemble des points

$$|Z - Z_A| = |Z - Z_B| \quad \text{L'ensemble des points } M(z) \text{ est la médiatrice du segment } [AB]$$

$$|Z - Z_A| = r \quad \text{L'ensemble des points } M(z) \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } r \quad r > 0$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$AB = |Z_B - Z_A|$$

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

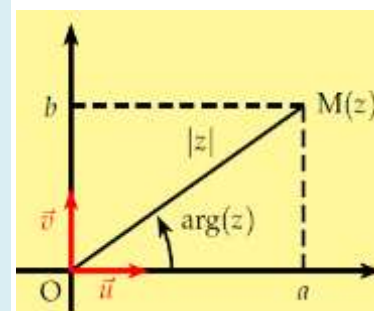
$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$$



Moivre

$$\cos \theta + i \sin \theta = [1, \theta]$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = [1, n\theta]$$

$$[1, \theta]^n = [1, n\theta]$$

$$\text{Re}[1, \theta]^n = \cos(n\theta)$$

$$\text{Im}[1, \theta]^n = \sin(n\theta)$$

Equation de second degré dans $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ des réels } a \neq 0$$

Solutions de l'équation

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$z = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta = 0$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta > 0$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Delta < 0$$

