Nombre complexe

- Le nombre de la forme $z = a + bi$ tel que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ s'appelle nombre complexe .
- $a = \mathrm{Re}(z)$ partie réelle de z ; $b = \mathrm{Im}(z)$ partie imaginaire de z .
- $z = a \in \mathbb{R}$ s'appelle réel pur ; $z = bi$;$\left(b \in \mathbb{R}^*\right)$ s'appelle nombre complexe imaginaire pur
- $\overline{z} = a - bi$ s'appelle le conjugué de $z = a + bi$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes . $\mathbb{C}$ est muni des opérations l'addition et la multiplication qui prolongent les mêmes opérations dans $\mathbb{R}$ ont mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$. le reste de la leçon on considéré $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de $\mathbb{C}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)

❖ Addition dans $\mathbb{C}$: $z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$. $x, y ; x'$ et $y' \in \mathbb{R}$

❖ Multiplication dans $\mathbb{C}$: $z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$.

cas particulier $k \in \mathbb{R}$: $k.z = k.(x + yi) = kx + kyi$

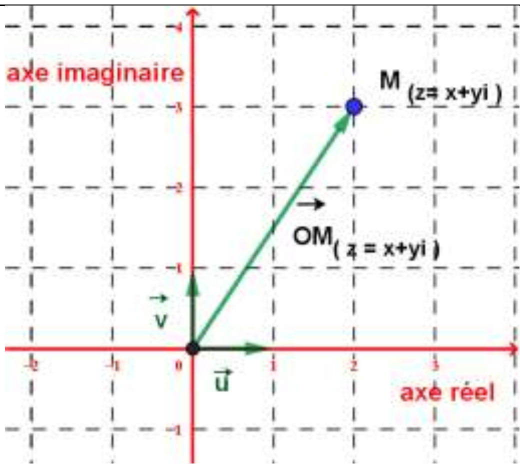
❖ L'inverse de $z = a + bi \neq 0\left((a,b) \neq (0,0)\right)$:

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{x' + y'i} = \frac{1 \times \overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{1 \times (x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2} i \ .$$

❖ Le quotient de z par z' : $\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{1}{z' \times \overline{z'}} \times z \times \overline{z'}$

$$= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \times (x + yi)(x' - y'i) = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} i$$

Présentation géométrique d'un nombre complexe



Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

- A tout nombre complexe $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M(x,y)$ de (P) c.à.d. :

$f : \quad \mathbb{C} \to (P)$

$z = x+yi \mapsto f(z) = f(x+yi) = M(x,y)$ (ou bien $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$)

❖ Dans ce cas :

➢ Le plan (P) est appelé le plan complexe .

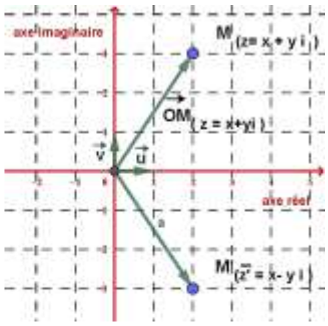
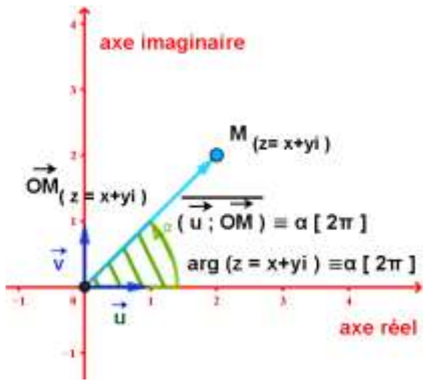
➢ le point $M(x,y)$ est l'image du complexe $z = x + yi$.

➢ on note $M_{(z)}$ ou $M_{(x+yi)}$ on lit le point M d'affixe z .de même pour le vecteur $\overrightarrow{OM}_{(z)}$.

➢ on note aussi z_M on lit z est l'affixe de M . de même pour $z_{\overrightarrow{OM}}$.

➢ Si $z = a \in \mathbb{R}$ alors M est sur l'axe des abscisses sera nommé axe réel .

➢ Si $z = bi$, $(b \in \mathbb{R})$ alors M est sur l'axe des ordonnés sera nommé axe imaginaire .

Propriétés des affixes	$A(z_A)$; $B(z_A)$; $C(z_C)$ et $I(z_I)$ sont trois points du plan complexe (P) . ❖ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. ❖ Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k(z_B - z_A)$. ❖ Le point I milieu de $[A,B]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. ❖ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; $(k \in \mathbb{R})$ càd $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ ou bien $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ d'où les points A et B et C sont alignés (avec $z_B - z_A \neq 0$)
Conjugué de $z = x + yi$ et Propriétés	 • $z' = x - yi$ est appelé le conjugué de z on note $z' = \overline{z} = x - yi$. • $z + \overline{z} = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2yi = 2\mathrm{Im}(z)i$. • $\overline{\overline{z}} = z$ et $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$ et $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ • $(z' \neq 0)$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$; $p \in \mathbb{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $p \in \mathbb{Z}^-$)
Module de $z = x + yi$	• Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module de z sera noté $.\lvert z \rvert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. • Interprétation géométrique du module de z : $\lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = \lVert \overrightarrow{OM} \rVert$ avec M d'affixe $z = x + yi$. • D'où : $\lVert \overrightarrow{AB} \rVert = AB = \lvert z_B - z_A \rvert$. • $\left\lvert \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right\rvert = \frac{AB}{AC}$ donc si on a $\left\lvert \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right\rvert = \frac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A .
Propriétés du module	$\lvert \overline{z} \rvert = \lvert -z \rvert = \lvert z \rvert = \lvert -\overline{z} \rvert$; $\lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$; $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\left\lvert \frac{1}{z'} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z' \rvert}$; $\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$ $(z' \neq 0)$; $\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$; $\lvert z^p \rvert = \lvert z \rvert^p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$
Argument d'un nombre complexe non nul	 $M_{(z)}$ $(M_{(z)} \neq O$ donc $z \neq 0)$ est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. • Toute mesure α de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ s'appelle argument du nombre complexe z on note : $\arg(z) \equiv \alpha \; [2\pi]$; d'où $\arg(z) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \; [2\pi]$ ou $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
Remarque	• $z = a > 0$ alors $\arg(a) \equiv 0 \; [2\pi]$ et $z = a < 0$ alors $\arg(a) \equiv \pi \; [2\pi]$.

- $z = bi$; $b > 0$ alors $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $z = bi$; $b < 0$ alors $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ (sans oublier $z \neq 0$) .

Propriétés des arguments

$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$	$p \in \mathbb{Z}$; $\arg(z^p) \equiv p \times \arg z\ [2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z'\ [2\pi]$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$
Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$	Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

« écriture trigonométrique (forme trigonométrique) D'un nombre complexe non nul

$z = x + yi \in \mathbb{C}^*$; $(z \neq 0)$ tel que $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$; $|z| = r$.
Le nombre complexe z s'écrit de la forme suivante :
$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ou $z = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ou $z = [\,|z|\ ,\arg(z)]$ ou $z = [r,\alpha]$ chaque écriture s'appelle écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe non nul z

Remarque

$z = a > 0$ alors $z = [a,0]$, $z = a < 0$ alors $z = [-a,\pi]$

$z = bi$; $b > 0$ alors $\left[b,\frac{\pi}{2}\right]$, $z = bi$; $b < 0$ alors $\left[b,-\frac{\pi}{2}\right]$

Operations sur les formes trigonométriques

Abraham de Moivre en 1736

Les operations	$z = [r,\alpha] = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z' = [r',\alpha'] = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$
Produit : $z \times z'$	$z \times z' = [r,\alpha] \times [r',\alpha'] = [r \times r', \alpha \times \alpha']$ ou $zz' = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \times r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ $= rr'(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha'))$
Produit : $\underbrace{z \times z \times \cdots z}_{\text{n fois}} = z^n$ Formule de MOIVRE	$z^n = [r,\alpha]^n = [r^n, n\alpha]$ $z^n = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ Cas particulier $r = 1$: $[1,\alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha]$ ou encore $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ formule de MOIVRE
Inverse	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{[r',\alpha']} = [r',-\alpha']$ ou $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')} = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i\sin(-\alpha'))$
Quotient	$\frac{z}{z'} = \frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right]$ ou $\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha') + i\sin(\alpha-\alpha'))$

Notation exponentielle ou écriture exponentielle D'un nombre complexe non nul

- L'écriture trigonométrique de $z=[r,\alpha]=[|z|,\arg z]$ sera notée de la manière suivante $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=re^{i\alpha}$
- $z=re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul
- propriétés : $\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}$; $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=e^{i(\alpha-\beta)}$; $\dfrac{1}{e^{i\beta}}=e^{i\beta}$; $e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$ avec α et β de $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

Formules d' EULER

Leonhard EULER (Bâle 1707, Saint-Pétersbourg 1783)

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i, notation utilisée pour l'intensité en électricité.

$\alpha\in\mathbb{R}$ on pose $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ on a :

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{cases}$$ on les appelle formules d' EULER

Remarque : avec $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$

- $e^{in\alpha}+e^{in\alpha}=z^n+\left(\bar{z}\right)^n=2\cos n\alpha$
- $e^{in\alpha}-e^{in\alpha}=z^n-\left(\bar{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$.
- $e^{in\alpha}\times e^{in\alpha}=z^n\times\left(\bar{z}\right)^n=1$

Equation du deuxième degré de la forme $z\in\mathbb{C}/z^2=a$

$a=0$ alors $S=\{0\}$	$a>0$ alors $S=\{\sqrt{a},-\sqrt{a}\}$	$a<0$ alors $S=\{i\sqrt{-a},-i\sqrt{-a}\}$

Equation du 2ième degré de la forme $z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$; $a\in\mathbb{R}^*$ $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ avec $\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta=0$ donc $S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
- $\Delta>0$ donc deux solutions réelles : $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta<0$ donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques: factorisation de az^2+bz+c

- $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$.
- $\Delta\neq0$ alors $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.
- $\Delta=0$ alors $az^2+bz+c=a(z-z_1)^2$

Ecriture complexe des transformations (noté T ou bien f): translation – homothétie - rotation

Transformation f dans le plan complexe qui transforme le point $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$

C'est-à-dire $\begin{array}{l}f\ :\ (P)\to(P)\\ M_{(z)}\mapsto f\left(M_{(z)}\right)=M'_{(z')}\end{array}$ On donne T ou bien f Donc il faut déterminer

la nature de T ou bien f et Ses éléments caractéristiques		
Rappel Transformation est :	Ecriture complexe	Transformation donnée de la forme f transforme le point $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z'=az+b\ ;(a,b\in\mathbb{C})$ Le programme se limite à trois cas (les valeurs de a)
Translation : $f=t_{\vec{u}}$ $f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	$z'-z=b$ ou bien $z'=z+b$	1er cas $a=1$ on a : $z'=z+b$ Nature de la transformation : f est une Translation Eléments caractéristiques : • b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation f .
Homothétie : $f=h(\Omega,k)$ Ω centre de l'homothétie k rapport de l'homothétie définition : $f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ ou bien $z'=kz+b$ $(b=\omega-k\omega\in\mathbb{C})$	2ième cas $a=k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ on a : $z'=kz+b$ Nature de la transformation f : f est une Homothétie Eléments caractéristiques : • k rapport de l'homothétie f • $\omega=\frac{b}{1-k}=\frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de l'homothétie f • Remarque : Ω est invariant par f donc $f(\Omega)=\Omega$ D'où : $z'=kz+b \Leftrightarrow \omega=k\omega+b$ donc $\omega=\frac{b}{1-k}$
Rotation : $f=r(\Omega,\alpha)$ Ω centre de l'homothétie α angle de rotation définition : $f(M)=M' \Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$	$z'-\omega=(z-\omega)e^{i\alpha}$ ou bien $z'=e^{i\alpha}z+b$ $(b=\omega-\omega e^{i\alpha})$	3ième cas $\|a\|=1$ on a : $z'=e^{i\alpha}z+b$ ou $z'=az+b=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z+b$ ou $z'=(x+yi)z+b\ ;(\text{avec}\ \|x+yi\|)$ Nature de la transformation f : f est une Rotation Eléments caractéristiques : • α ou $\arg(x+yi)$ est l'angle de la rotation . • Ou $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{b}{1-e^{i\theta}}=\frac{b}{1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{b}{1-(x+yi)}$ $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{b}{1-e^{i\theta}}$ est l'affixe du centre Ω de la rotation f • Remarque : ❖ Ω est invariant par f donc $f(\Omega)=\Omega$ D'où : $z'=az+b \Leftrightarrow \omega=k\omega+b$ donc $\omega=\frac{b}{1-a}$. ❖ De même : $\alpha\equiv\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\ (2\pi)$

Benmoussa Mohammed

la géométrie et Les nombres complexes

A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont z_A et z_B et z_C et z_D et z_I

• $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \left\|z_B - z_A\right\|$ • $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ affixe de I milieu de $[AB]$	Mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ est : $\overline{(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$; $(A \neq B)$	Mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est : $\overline{(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD})} \equiv \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A})\ [2\pi]$
A et B et C sont alignés équivaut à : $(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi]$) Remarque : $\left(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi] \text{ ou } \arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]\right)$ équivaut à $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$	$Z_{\vec{w}}$ et $Z_{\vec{t}}$ affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\overline{(\vec{u}\ ,\ \vec{v})} \equiv \arg(Z_{\vec{v}})\text{-}\arg(Z_{\vec{u}})\ [2\pi]$ ou $\overline{(\vec{u}\ ,\ \vec{v})} \equiv \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut $\dfrac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$ $(Z_{\vec{v}} \neq 0)$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut $\Leftrightarrow \dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} = bi$;$(b \in \mathbb{R}^*)$ $(Z_{\vec{v}} \neq 0)$ $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$	A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$
$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [2\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$	$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Relation complexe	Signification géométrique
L'ensemble des M d'affixe z tel que : $\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$	1. $AM = BM$. M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$. 2. L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
$\|z - z_A\| = k$ $(k > 0)$	1. $AM = k$ 2. M appartienne au cercle de centre A et de rayon k .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right] = re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	• Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors ABC est un triangle rectangle en A . • Si $r = 1$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .
$\left\|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\| = 1$	alors ABC est un triangle isocèle en A .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\dfrac{\pi}{3}\right] = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	alors ABC est un triangle équilatéral .