Nombres complexes

Les nombres complexes prennent naissance au **XVIème** siècle lorsqu'un italien ***Gerolamo Cardano*** (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de ***Jérôme Cardan***, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele* ***Bombelli*** (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de ***Cardan*** sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du **troisième degré**.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard* ***Euler*** (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au **XIXe** siècle, ***Gauss*** puis ***Hamilton*** posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

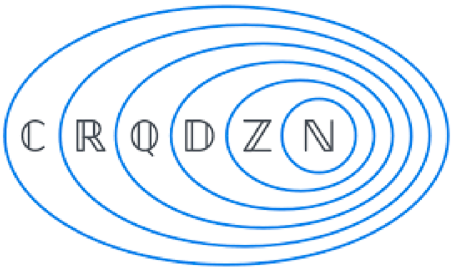
I) *Notion de nombre complexe.*

1) Définition-Vocabulaire.

Définition : On appelle nombre complexe, tout élément écrit $\boldsymbol{a+ib}$, dans lequel $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels et $\boldsymbol{i}$ un élément vérifiant $i^2=-1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Vocabulaire :

- L'écriture $\boldsymbol{a+ib}$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle la **partie réelle** et le nombre $\boldsymbol{b}$ s'appelle la **partie imaginaire,** et on note $\mathbf{Re}(z)=a$ et $\mathbf{Im}(z)=b$.



Remarques :

- Si $b=0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a=0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**, et on dit que $z\in iIR$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans *IR*.
- $z=z' \Leftrightarrow \mathbf{Re}(z)=\mathbf{Re}(z')$ **et** $\mathbf{Im}(z)=\mathbf{Im}(z')$
- $z=0 \Leftrightarrow \mathbf{Re}(z)=0$ **et** $\mathbf{Im}(z)=0$.
- $\mathbb{C}$ est un corps non ordonné.

2) Conjugué d'un nombre complexe.

Définition : Soit un nombre complexe $z=a+ib$.
On appelle nombre complexe ***conjugué*** de z, le nombre, noté $\overline{z}$, où $\overline{z}=a-ib$.

Propriétés : Soit $z=a+ib$ et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

1) $\overline{\overline{z}}=z$; 2) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; 3) $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$; 4) $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$; 5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ / $z'\neq 0$

6) $z\times\overline{z}=a^2+b^2$; 7) $z+\overline{z}=2\mathbf{Re}(z)$; 8) $z-\overline{z}=2\mathbf{Im}(z)$; 9) $z\in iIR \Leftrightarrow z=-\overline{z}$; 10) $z\in IR \Leftrightarrow z=\overline{z}$

Remarque : Si $z=a+ib$ et $z\neq 0$ alors $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ (forme algébrique de $\frac{1}{z}$)

II) *Représentation géométrique d'un nombre complexe.*

Définitions : Soient a et b deux réels. Et le plan est rapporté à un repère orthonormé **direct** $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- A tout nombre complexe $z=a+ib$, on associe le point $M(a,b)$, le nombre complexe $z=a+ib$ est appelé **affixe** du point M. Et le point M est appelé image ponctuelle de $z=a+ib$, et on note $M(z)$.
- L'image vectorielle du nombre $z=a+ib$ est le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OM}$, le nombre $z=a+ib$ est appelé **affixe** du vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OM}$. (Voir figure 1 p26)

Propriétés :

$M(z)$ et $M'(z')$ sont deux points du plan et $\vec{w}(z)$ un vecteur.

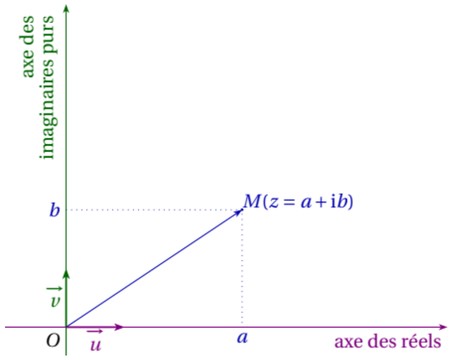
a) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z+z'$.

c) Le vecteur $k\vec{w}$, k réel, a pour affixe $k.z$.

d) Le milieu I du segment $[MM']$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z+z'}{2}$

(figure 1)



III) *Equations du second degré dans* $\mathbb{C}$.

Considérons l'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c des réels avec $a\neq 0$. Et soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta<0$: L'équation $az^2+bz+c=0$ a deux solutions complexes conjuguées :

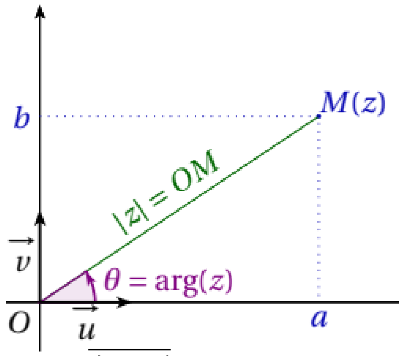
$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{avec} \quad \Delta=\delta^2.$$

IV) *Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.*

Dans tout ce qui reste, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit $M(z)$ un point du plan avec M différent du point O et $z=a+ib$.

Alors $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\arg z$

Définitions **:** On appelle ***module*** de $z=a+ib$, noté $|z|$ le réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

- On appelle ***argument*** de $z=a+ib$, noté $\arg(z)$ tout réel θ tel que:

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Si on pose $r=|z|$ et $\arg(z)=\theta$, alors $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et cet écriture est dite écriture ***trigonométrique*** de z.

Propriétés des modules

Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier naturel.

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|z|=0$; $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$; $|z^n|=|z|^n$ *et* $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ / $z'\neq 0$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ ***(Inégalité trigonométrique)***

Interprétation géométrique

$A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points , deux à deux distincts.

- $|z_B-z_A|=AB$ *et* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- A , B et C sont **alignés** si et seulement si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in IR$.
- Le triangle ABC est rectangle ssi $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in iIR^*$.
- A , B , C et D sont **circulaires** si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\in IR$.

Propriétés des arguments

$\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

$\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$

$\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$

Si a et b deux réels non nuls

$a>0 \Rightarrow \arg(a)\equiv 0[2\pi]$

$a<0 \Rightarrow \arg(a)\equiv\pi[2\pi]$

$b>0 \Rightarrow \arg(ib)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$b<0 \Rightarrow \arg(ib)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Pour tout réel θ et tout entier n on a : $\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))}$ Formule de ***Moivre***

V) *Notation* $r.e^{i\theta}$.

Pour des nombres complexes de module **1** et d'argument x et y on peut démontrer que :

$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$, Et par analogie avec la propriété $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Le nombre $\cos x + i\sin x$ est noté e^{ix} , notation compatible avec la formule de ***Moivre***.

Donc tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit $r.e^{i\theta}$

Propriétés : Soient θ et α deux réels et n un entier, alors :

$$e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \quad ; \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \ (Moivre)$$

Propriété : Pour tout réel θ on a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$ $(Formules\ d'Euler)$

Remarques : Ces formules permettent de linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$, c'est-à-dire d'exprimer ces quantités en fonction de $\sin(px)$ et $\cos(px)$. La linéarisation des fonctions trigonométriques est souvent très utile en analyse, par exemple pour calculer des **primitives** de ces fonctions.

- La formule de ***Moivre*** permet par exemple d'exprimer $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ *et/ou* $\sin(x)$.

VI) *Transformations planes.*

Soient $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$ trois point du plan complexe et $\vec{u}(a)$ un vecteur .

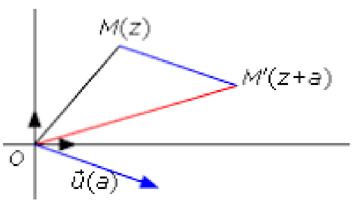
Translation

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par la **translation *t*** de vecteur $\vec{u}(b)$, alors : $z' = z + a$

L'égalité $z' = z + a$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **translation**.

Donc :

$t(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + a$



Homothétie

Soit k un réel non nul.

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par **l'homothétie *h*** de centre Ω et de rapport ***k***, alors :

$z' - \omega = k(z - \omega)$

L'égalité $z' - \omega = k(z - \omega)$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **homothétie**.

Donc :

$h(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation

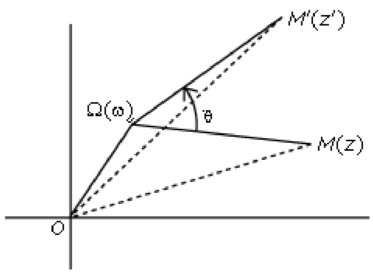
Soit θ un réel

Si ***M'*** est l'image de ***M*** par la rotation ***R*** la rotation de centre Ω et d'angle θ ., alors

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est appelé **l'écriture** complexe de cette **rotation**,

donc : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$



VII) *Ensembles de points .*

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = r$ *avec* $r > 0$ est le ***cercle*** de ***centre*** *A* et de ***rayon r***
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la ***médiatrice*** du segment $[AB]$
- Parfois pour déterminer l'ensemble des points $M(z)$, On pose $z = x + iy / (x;y) \in IR^2$ dans la condition et l'on essaie de se ramener à une équation cartésienne.