

Nombres complexes

EL KYAL MOHAMED

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = z = a + ib / a; b \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct O, \vec{e}_1, \vec{e}_2

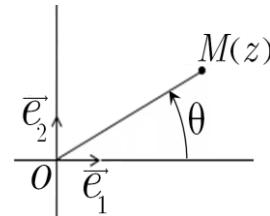
➤ **Définition et propriétés :**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a; b \in \mathbb{R}^2$

- **La forme algébrique** du nombre complexe z est : $a + ib$.
- **La partie réelle** du nombre complexe z est : $Re z = a$.
- **La partie imaginaire** du nombre complexe z est : $Im z = b$.
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $Re z = 0$.
- **Egalité** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow Re z = Re z'$ et $Im z = Im z'$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $|z| = \sqrt{zz} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'image** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté $M(z)$
- **L'affixe** du point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté z_M
- **L'affixe** du vecteur $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- **L'affixe** du vecteur \overrightarrow{AB} est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- **L'argument** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}$
noté $\arg z$

on a $\arg z \equiv \theta [2\pi]$

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$



- **La forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z est :

$$z = r \cos \theta + i \sin \theta = [r, \theta]$$

avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$

$[r, \theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r \cos \theta + i \sin \theta$

- **La forme exponentielle** du nombre complexe non nul z est : $z = r e^{i\theta}$

avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$

➤ Propriétés:

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\bar{\bar{z}} = -z$	$ -z = z $	$\arg -z \equiv \pi + \arg z [2\pi]$
Conjugué	$\bar{\bar{z}} = z$	$ \bar{z} = z $	$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
Produit	$\bar{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$	$ z \times z' = z \times z' $	$\arg zz' \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
Puissance	$\bar{z^n} = \bar{z}^n$	$ z^n = z ^n$	$\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$
Inverse	$\bar{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$
Quotient	$\bar{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
Somme	$\bar{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$		

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-\left[r, \theta\right] = \left[r, \pi + \theta\right]$	$-re^{i\theta} = re^{i\pi + \theta}$
Conjugué	$\bar{\left[r, \theta\right]} = \left[r, -\theta\right]$	$\bar{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Produit	$\left[r, \theta\right] \times \left[r', \theta'\right] = \left[rr', \theta + \theta'\right]$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$
Puissance	$\left[r, \theta\right]^n = \left[r^n; n\theta\right]$	$re^{i\theta^n} = r^n e^{in\theta}$
Inverse	$\frac{1}{\left[r, \theta\right]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{\left[r, \theta\right]}{\left[r', \theta'\right]} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ • $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$ • $\bar{z}z = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2$ • $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$ | <ul style="list-style-type: none"> • z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ • z est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ • z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ |
|--|---|

➤ **Formule de Moivre :**

$$\cos\theta + i \sin\theta^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

➤ **Formules d'Euler :**

$$\cos\theta = \frac{1}{2} e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i} e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

➤ **Équations du second degré à coefficients réels :**

L'équation :		Ensemble de solution:
$z \in \mathbb{C}$	$\Delta > 0$	$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
$az^2 + bz + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

➤ **Nombres Complexes et géométrie:**

Notion complexe :	Relation géométrique :
$ z_B - z_A $	la distance AB
$ z - z_A = r \quad r > 0$	<ul style="list-style-type: none"> • $AM = r$ • M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	<ul style="list-style-type: none"> • $AM = BM$ • M appartient à la médiatrice de $[AB]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	l'milieu de $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A, B et C trois points alignés
$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right)$

➤ **Nature d'un triangle:**

Nature du triangle ABC	
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle isocèle et rectangle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC est un triangle équilatéral

➤ **Ecritures complexes des transformations du plan:**

Transformations:	Ecriture complexe :
Translation de vecteur \vec{u} d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre Ω ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre Ω ω et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

➤ **Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :**

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\vec{o}, \overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}$

Soit M' z' l'image d'un point M z par une transformation F

L'expression complexe du transformation F	Nature du transformation F	
	$a = 1$	F est une translation de vecteur \vec{u} d'affixe $z_{\vec{u}} = b$
$z' = az + b$ <p>avec $a; b \in \mathbb{C}^2$ $(a \neq 0)$</p>	$a \in \mathbb{R}^* - 1$	F est une homothétie de rapport a et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)
	$a \in \mathbb{C}^* - 1$ avec $ a = 1$	F est une rotation d'angle : $\theta \equiv \arg a [2\pi]$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)