Résumé de Cours sur les nombres complexes

PROF : ATMANI NAJIB **2ème BAC Sciences ex(pc-svt…)**

NOMBRES COMPLEXES

A)L'ensemble $\mathbb{C}$; définition et vocabulaire

il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$ et tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b réels

Le réel a s'appelle la partie réel de z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$

Le réel $\boldsymbol{b}$ s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$ et L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.

1)Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x';y') \in \mathbb{R}^2$

deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow x = x' et y = y'$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

3) l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$

$(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$ et $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

4) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $\boldsymbol{i\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{iy}/ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$

5) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ ($\subsetneq$: inclus strictement)

6)On general les calculs dans $\mathbb{C}$ s'éffectuent de la meme facon que sur $\mathbb{R}$ seulement on remplace i^2 par -1 et on a :

a) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

b) $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$($z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}$) $n\, fois$

c) $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ d) $z^{n+m} = z^n \times z^m$ 5) $z^{n-m} = z^n / z^m$

e) $\left(z^n\right)^m = z^{n\times m}$

f) $z^n - z_1^n = \left(z - z_1\right)\left(z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \ldots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1}\right)$

g) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

h) $\left(z + z_1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z_1^{n-k}$ formule de binôme

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.

Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

B)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe :

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $\mathscr{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

1) Le point $M(a, b)$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point $\boldsymbol{M}$

on écrit : $z = aff(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$ et Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

7) Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe

a)L'axe $\left(O;\vec{u}\right)$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $\left(O;\vec{v}\right)$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathscr{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

8)Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur sur l'axe des Réels.

9)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

10) Les opérations sur les affixes.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$;

M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ; On a :

1) $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2) $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$

3) $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$

4) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

5) Soients $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

6) pour 2 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ pour 3 points pondérés :

$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

7)Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

C) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1)Soients x et y deux réels et z = x+iy. Le conjugué du nombre z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par : $\bar{z} = x - iy$.

et les images de z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

a)si $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

b) $\bar{\bar{z}} = z$ c) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ d) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

e) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ f) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

g) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ h) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

k) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$ l) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

m) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ $n \in \mathbb{Z}$ n) $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

D) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1)Soit $z = x+iy$ un nombre complexe avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ s'appelle le module du nombre complexe z

2) Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

1) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$ 2) $|z|^2 = z\bar{z}$ 3) $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

4) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ 5) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

6) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$

7) $|z^n| = |z|^n$ si $z \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ 8) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

8)si M est l'image du nombre complexe z alors $|z| = OM$

9Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors **:**

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

E) forme trigonométriqe et argument d'un complexe

1)Le plan complexe est menu d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}^*$ et $M(z)$ son image. L' argument du nombre complexe $\boldsymbol{z}$ une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$

2) $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

a) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ b) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

c) $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \succ 0$ et $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \prec 0$

d) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ e) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

3) Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$ Où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul $\boldsymbol{z}$

4) $z \in \mathbb{C}^*$ Si on a $z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$ avec $r \succ 0$

Alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ on écrit : $z = [r, \theta]$

5)Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

b) $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$

c) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$

d) $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

et on a : $[r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$

e) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

f) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ et on a : $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$

g) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$

F) arguments et interpretations geometriques

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ et Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1) $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$ 2) $(\vec{e_1}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(b - a)[2\pi]$

3) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$ 4) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

5) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

6) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si :

$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$ Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

7) $(AB) \perp (CD)$ ssi : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

G) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL :1) Soit θ un réel on pose : $cos\theta + i\ sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\ sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

H) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1) Les équations de second degré

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où sont des réels avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a :**Si $\Delta = 0$** alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

I) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u}\ ) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si :$z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff}(\vec{u}\ ) = \boldsymbol{a}$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = kz + \omega(1-k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = (z-\omega)e^{\theta i} + \omega$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage