EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL SUR LES LOGARITHMES

EXERCICE 01

Simplifier les écritures suivantes :

$$\ln 7+\ln\left(\frac{1}{7}\right) \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{16}\right)+3\ln 2 \quad ; \quad \ln 36-2\ln 3$$

$$2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \ ; \ \ln\left(e^2\sqrt{8}\right)-\frac{1}{2}\ln 2 \ ; \ \ln\left(e^{-3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(e^6\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right) \quad ; \quad \ln 42+2\ln 28-3\ln 14$$

$$\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right) ; \ \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$$

EXERCICE 02

Simplifier les écritures suivantes :

$$A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)+\ln\left(12\sqrt{3}\right)+\ln\left(3\sqrt{3}\right)$$

$$B=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)^{15}+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)^{15}$$

$$C=\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$D=\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$X=2\ln\left(e\sqrt{e}\right)-3\ln\left(e^3\right)-2\ln\left(e^{-6}\right)$$

$$Y=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{98}{99}\right)+\ln\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$Z=\frac{3}{8}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$

EXERCICE 03

Calculer en fonction de $a=\ln 5$ et $b=\ln 2$ ce qui suit :

$$x=\ln\left(16\sqrt{\frac{4}{5}}\right) \quad ; \quad y=\ln(1000) \quad ; \quad z=\ln(0{,}64)$$

$$u=\ln\left(\frac{8}{125}\right) \quad ; \quad v=\ln\left(\frac{5}{16}\right)+\frac{1}{3}\ln 50-4\ln\sqrt[3]{5}$$

EXERCICE 04

Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On pose :

$$A=\ln a \quad \text{et} \quad B=\ln b \quad \text{et} \quad C=\ln c$$

Exprimer ce qui suit en fonction de a, b et c :

$$X=\ln\left(a^8b^9c^{-\frac{3}{2}}\right) \quad ; \quad Y=\ln\left(\frac{a}{b^7}\right)+\ln\left(\frac{a^{-1}}{c^3}\right)$$

$$Z=\ln\left(\sqrt{abc.\sqrt[5]{a}.\sqrt[4]{b}}\right) \quad ; \quad T=\ln\left(\sqrt[5]{\sqrt{a}.\sqrt[3]{b^{-2}}.c\sqrt{c}}\right)$$

EXERCICE 05

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$

Calculer le rapport $\frac{a}{b}$.

EXERCICE 06

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que : $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.

2) En déduire que : $\frac{\ln a+\ln b}{2}\leq\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

EXERCICE 07

Soit x et y deux réels strictement positifs.

Montrer que : $(x+y)\ln(x+y)>x\ln x+y\ln y$

EXERCICE 08

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(3-2x)$; 2) $f(x)=\ln\left(x^2-5x\right)$

3) $f(x)=\ln|x+1|$; 4) $f(x)=\ln^2 x-3\ln x$

5) $f(x)=\ln\left((x-1)^2\right)$; 6) $f(x)=\sqrt{2-\ln x}$

7) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$

8) $f(x)=\ln((x+2)(x-1))$; 9) $f(x)=\ln(\ln x)$

10) $f(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$; 11) $f(x)=\frac{x+3}{x\ln x}$

12) $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{x-3}\right)$; 13) $f(x)=\ln\left|\frac{2x+3}{x-5}\right|$

14) $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$; 15) $f(x)=\sqrt{x\ln(x+1)}$

16) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x-6}$; 17) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$

18) $f(x)=\frac{\sqrt{2-\ln x}}{\ln^2 x-3\ln x-4}$.

EXERCICE 09

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln x=0$; 2) $\ln x=1$; 3) $2\ln x+3=0$

4) $\ln x=3\ln 2$; 5) $2\ln x=\ln 3+\ln 27$

6) $2\ln x=\ln(x^2)$; 8) $\ln^2 x=4$; 9) $\ln x^2=-2$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(7x-1)=\ln(5x+1)$; 2) $\ln(x^2-x)=\ln(x+1)$

3) $\ln(x-3)+\ln(x-1)=\ln(2x+3)$.

4) $\ln[(x-3)(x-1)]=\ln(2x+3)$.

5) $\ln(x-1)+\ln(x+3)=\ln(x^2+4x+9)$.

6) $(1+3\ln x)(1-\ln x)=0$; 7) $\ln^2 x+\ln x=0$

8) $(\ln x)^3=3\ln(x^2)$; 9) $3(\ln x)^2-7\ln x+10=0$

10) $\frac{1}{2}\ln(4x)=\ln(3-2x)-\ln(\sqrt{2x+1})$.

11) $\ln(\sqrt{2x-3})=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$.

12) $\ln|x-1|+\ln|2x-1|=0$; 13) $\ln|3x+1|=5\ln 2$

14) $\ln\left(\frac{x+5}{x+2}\right)+2\ln(x+2)=\ln(3x+9)$

15) $\ln(\sqrt{2x+1})=-\frac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\ln x-5\geq 0$; 2) $1-\ln x<0$; 3) $\ln x\leq -1$

4) $\ln(x+5)<\ln(3x+11)$; 5) $(x-1)\ln x\geq 0$

6) $\ln^2 x-\ln x\geq 0$; 7) $\ln^2 x-6\ln x+5\leq 0$

8) $(\ln x-1)(3-2\ln x)\geq 0$; 9) $\ln(x^2+3x+3)\geq 0$

10) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)>\ln(x-3)$

11) $\frac{\ln x}{\ln x+2}\geq 0$; 12) $\frac{2-\ln x}{\ln x}\leq 3$; 13) $\ln^2 x-4\geq 0$

14) $\ln(x+1)-\ln x\leq \ln(2-x)$; 15) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geq \ln x$

16) $\ln x+\ln(4-x)>0$; 17) $\ln(x^2-5)\leq \ln(-4x)$

18) $\ln\sqrt{2x-3}+\ln(x+1)<\frac{1}{2}\ln(x-3)$.

EXERCICE 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1):\ln(\sqrt{x-1})=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)$

$(E_2):\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+8=0$

$(E_3):\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1):\ \ln(x^2-2x)\leq \ln x$; $(I_2):\ln\left(\frac{3x-7}{4x+5}\right)\geq 0$

$(I_2):-\ln^2 x-\ln x+2>0$; $(I_4):\frac{\ln|x-2|}{3+\ln x}>0$

$(I_5):0<\frac{\ln x}{\ln x-1}<1$; $(I_6):\ln^3 x-3\ln^2 x+2>0$

EXERCICE 13

Pour chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité correspondante :

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 10^{-5}$; 2) $(1{,}1)^n\geq 100$; 3) $\frac{1}{4^n}<0{,}03$

4) $25\left(1+\frac{7}{100}\right)^n\geq 4$; 5) $40\left(1-\frac{5{,}5}{100}\right)^n\leq 1$

EXERCICE 14

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 4\ln x - 3\ln y = 6 \\ 2\ln x + 5\ln y = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\ln x - 5\ln y = -9 \\ 2\ln x + \ln y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 10 \\ \ln x + \ln y = 4\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 - \ln 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 13 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x \times \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 3 \\ \ln x - \ln y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(xy) = -5 \\ \ln x . \ln y + 14 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = e \\ \ln x + \ln y = 2 + \ln 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^5) + \ln(y^2) = 16 \\ \ln(x^3) + \ln(y^3) = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^3 y^2) = 5 \\ \ln x - 4\ln\sqrt{y} = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 24 \end{cases}$

CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln x} + x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x - 2 - \dfrac{\ln x}{x^5}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(\ln x)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2x - 5\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^2 x - 3\ln x + 2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x - 3\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{4x+\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x^2+3x) - x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x\ln(x+2))$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x + \ln(x^2-1))$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln\sqrt{x^2+2x-3}$

EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\ln x - 2}{1+\ln x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\ln(-x)}{3+\ln(-x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln^2 x + \ln x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+4+\ln(x+2)}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-5x+6)\ln(x-2)$

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x - 3\ln x + 2}{x-e}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\ln x}{2-\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-2}{4x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x^3-8)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2-3x+7)}{2x+3}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3x}{x-2} + \ln(x-2)\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x^2+x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+3} - x\right)$

EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(2x+\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln^5 x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x)\ln x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{4x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+5x+2)}{1-\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1} + \ln\sqrt{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\ln|x| + 3x}{\ln|x| - 4x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2-3x}{2+5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+5\sin x}{1+3\tan x}\right)$

CALCUL DES FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$:

1) $f(x) = x\ln x - x + 1$ et $I =]0;+\infty[$.
2) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et $I =]-\infty;0[$.
3) $f(x) = \ln|x^2 - 8x + 12|$ et $I =]2;6[$.
4) $f(x) = \ln(\ln x)$ et $I =]1;+\infty[$.
5) $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 5$ et $I =]0;+\infty[$.
6) $f(x) = \dfrac{3\ln x + 2}{\ln x - 1}$ et $I =]0;e[$.
7) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ et $I = \mathbb{R}$.
8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$ et $I = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$.
9) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ et $I =]0;e[$.
10) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $I =]0;+\infty[$.
11) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-4x}\right)$ et $I = \left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right[$.
12) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4x}{x+4}\right|$ et $I =]4;+\infty[$.
13) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 5}$ et $I =]0;+\infty[$.
14) $f(x) = \ln\left|x + 3 - \sqrt{x^2 + 9}\right|$ et $I =]0;+\infty[$.
15) $f(x) = \ln(\tan x)$ et $I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
16) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ et $I =]e^{-1};e[$.
17) $f(x) = x^2\left(2 - \dfrac{3}{\ln x}\right)^4$ et $I =]1;+\infty[$.

EXERCICE 20

En utilisant la dérivée logarithmique, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x}}{(x^3+1)^5}$ et $I =]0;+\infty[$.
2) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 3}}{\sqrt{x^4 + 3}}\right)^5$ et $I =]1;+\infty[$.
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 1}}{x\sqrt{x^2 + 4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

VARIATIONS ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.
2) Montrer que la droite (Δ): $x = 1$ est un axe de syémtrie de la courbe $\mathscr{C}_f$
3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.
5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
6) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.
8) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]2;+\infty[$.
   a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   b) Calculer $(g^{-1})'(0)$.

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\ln(x+1) & \text{si } x>-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en $x_0=-1$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point $x_0=-1$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Que peut-on déduire ?

4) Étudier les variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 23

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

puis étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

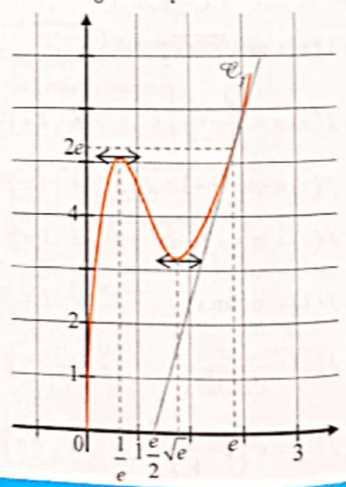
$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$$

b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et que f est croissante sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 25

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée en-dessous avec sa tangente au point d'abscisse e.



On admet l'égalité suivante :

$$f(x)=2x\left[a\ln^2 x+b\ln x+c\right]$$

où a, b et c désignent des réels.

1) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

b) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'(e)$, $f'(\sqrt{e})$ et $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=2x\left[2\ln^2 x-3\ln x+2\right]$$

2) a) Lire graphiquement le sens de variations de la fonction f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et retrouver ainsi les résultats précédents.

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)^2 & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in D-\{0\}$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x-\ln x+2}{\ln^2 x}\right)$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

CALCUL DES PRIMITIVES

EXERCICE 27

Pour chacun des cas suivants, déterminer toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

1) $f(x)=-\dfrac{5}{x}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $I=]-\infty;0[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $I=]-2;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$; $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^4}$; $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$; $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$; $I=]2;5[$

8) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+x-7}{x}$; $I=]0;+\infty[$

EXERCICE 28

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction g sur l'intervalle I :

1) $g(x)=x^2-2-\dfrac{4}{x+1}$; $I=[0;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]1;+\infty[$

3) $g(x)=\dfrac{2}{x\sqrt{1-\ln x}}$; $I=]0;e[$

4) $g(x)=\tan x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

6) $g(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$; $I=]-1;+\infty[$

7) $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; $I=]0;+\infty[$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = 4x\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 35

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$ et $g(x) < 0$ pour tout $0 < x < 1$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $f(x) \geq x - 1$.

e) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D).

4) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 37

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = e^3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{e^2 u_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq e^2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{1+\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = \left[0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) Calculer : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

7) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln x)^2}$$

et en déduire que : $(\forall x \in D_f - \{0\})\ f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f''(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x(1+\ln x)^4}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

10) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

11) Soit g la restriction de f sur $I = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.

c) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{e}{2}\right)$.

c) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 39

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de $g(x)$

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.

6) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e^e};\frac{1}{e}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

7) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.

8) Tracer les courbe $\mathscr{C}_f$ et (Γ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 40

Première Partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x - \ln x$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

2) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de h.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ x - \ln x \geq 1$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on déduire ?

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (Δ) d'équation $y = x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

7) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) - x = \frac{x(1 - h(x))}{h(x)}$$

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 7) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 41

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle par $I = [0;+\infty[$: $f(x) = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Que peut-on déduire ?

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu. (On pourra poser : $t = x + \sqrt{x^2 + 2x}$).

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 42

Soit f et g les fonctions numériques définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$$

et : $$g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln x$$

1) a) Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de f et g.

c) En déduire que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1}\le\ln(x+1)-\ln x\le\frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=1+\frac{1}{2}+..+\frac{1}{n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n\ge\ln(n+1)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 43

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\sqrt{\ln x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x-1}=x\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}}$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}$

Puis dresser le tableau de variation de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2\ln x-1}{4x\sqrt{\ln^3 x}}$$

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en e puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 44

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{x}{x+2}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ g(x)>0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. (Poser : $X = \dfrac{2}{x}$)

Que peut-on déduire à propos de la courbe $\mathscr{C}_f$?

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f''(x) = \dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

6) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{2x}{x+2}$$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f(x) - h(x) = xf'(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes des fonctions h et f.

8) On propose dans cette question la détermination de toutes les fonctions g dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant la relation (R) suivante :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ g(x) - xg'(x) = h(x)$$

On pose : $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g vérifie la relation (R) si, et seulement si :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

b) En déduire les fonctions g vérifiant (R).

EXERCICE 46

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g(x) > 0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x + 1 - \ln^2 x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (poser : $x = X^2$)

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$$

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f''(x) = \frac{2(-1+\ln x)}{x^2}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{e} \leq u_n \leq e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On pourra utiliser le résultat de 2) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f''(x) = \frac{3\ln x - 2}{4x^2\sqrt{x}}$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 48

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = 2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]$$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\left[0; \sqrt{e-1}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{e-1}; +\infty\right[$.

c) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}\right[$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 puis déterminer $f'_d(0)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 1)\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$.

b) En déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 49

Première Partie :

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x)=x+1+\ln x$$

1) a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

b) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $\dfrac{1}{e^2}<\alpha<\dfrac{1}{e}$.

3) En déduire que $h(x)>0$ pour tout $x\in]\alpha;+\infty[$ et que $h(x)<0$ pour tout $x\in]0;\alpha[$ puis dresser le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha)=-\alpha$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)=-\frac{2x\ln x+(x^2-1)}{x(x+1)^3}$$

b) Montrer que $2x\ln x$ et x^2-1 ont le même signe sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

7) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

8) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Vérifier que $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=1$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 et que : $(g^{-1})'(1)=\dfrac{1}{\alpha}$.

EXERCICE 50

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2\ln\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x+a}$.

1) Montrer que : $D_f=]-\infty;-a[\cup]0;+\infty[$.

2) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$(-a-x)\in D_f \quad \text{et} \quad f(-a-x)+f(x)=0$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{2x\ln x+a}{x}+\frac{a}{x+a}-2\ln(x+a)$$

b) En déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$ puis montrer que :

$$\lim_{\substack{x\to-a \\ x<-a}} f(x)=-\infty$$

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 51

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)^2} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(\ln x-1)^2}{(1+\ln^2 x)^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\le x$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=1 \quad\text{et}\quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n\le e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 6).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 52

Une vibration sonore se mesure par sa fréquence et donc son intensité (I) exprimée en W/m^2. Le décibel (dB) est, quant à lui, utilisé pour exprimer le rapport de deux intensités acoustiques. On définit le nombre de décibels, que l'on note N, engendré par une vibration sonore d'intensité I par : $N=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

(I_0 est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine ; I_0 est voisin de $10^{-12}\ W/m^2$).

1) Que vaut N lorsque $I=I_0$? Lorsque $I=10I_0$?

2) Le chuchotement (discret) de deux élèves en classe est voisin de $20\ dB$. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à I_0 ? Même question, pour une conversation de deux personnes, émettant $50\ dB$.

3) On dit que le seuil de douleur est atteint à partir de $120\ dB$. Qu'en est-il alors de l'intensité émise par rapport à I_0 ?

4) Le dernier concert des Stringers in the night, a été mesuré de $105\ dB$!

Qu'en est-il du rapport $\dfrac{I}{I_0}$?

EXERCICE 53

Première Partie :

Soit u la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=x^2-2+\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction u et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Vérifier que : $1,3<\alpha<1,4$

(on donne : $\ln(1,3)\approx 0,26$ et $\ln(1,3)\approx 0,34$).

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de la variable x.

4) Justifier que : $\ln\alpha=1-\alpha^2$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}$$

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Troisième Partie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note :

- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0;2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse $x\in]0;+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par :

$$AM=f(x)$$

2) a) Montrer que la distance AM est minimale en un point de (Γ), noté P, dont on précisera les coordonnées.

b) Montrer que : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3) La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) au point P ? Justifier la réponse

EXERCICE 54

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}$.

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4.

2) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-(x-1)$

a) Étudier les variations de la fonction f puis en déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \ln x\leq x-1$.

b) En utilisant le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$ dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ 1-\frac{1}{x}\leq\ln x$$

c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{p+1}\leq\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\leq\frac{1}{p}.$$

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Écrire l'encadrement du 3) c) pour tous les valeurs de p allant de n à $2n-1$.

b) En additionnant membre à membre les inégalités obtenues, démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n\leq\ln 2\leq u_n+\frac{1}{2n}$$

c) En déduire un encadrement de $\ln 2-u_n$ puis prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln 2$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Première Partie :

On considère les fonctions numériques g et h définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1-\ln x \quad \text{et} \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1) a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis étudier les variations de la fonction g.

b) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ g(x)\geq 0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (x-1)\ln x\geq 0$.

c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ h(x)>0$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$.

a) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$

c) Étudier le signe de $f(x)-x$ puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

4) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à $\left]1;\dfrac{3}{2}\right[$)

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\sqrt{2} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1<u_n<e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 3) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1+2\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$x>1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)<0 \quad \text{et} \quad 0<x<1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

Deuxième Partie :

Soit f fonctions numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

6) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O.

a) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

7) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0;2[)\ f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que le point $A(1;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;0)$.

3) Pour tout $x \in]0;2[$, on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ et $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$.

(On prend : $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 7 \approx 1,94$)

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

DEVOIR 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) Montrer que f est continue à droite en 0.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

7) Dresser le tableau de variations de f.

8) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(e;0)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

DEVOIR 5

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2cm$)

Première Partie :

1) Montrer l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote que l'on déterminera.

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur chacun des intervalles $[1;e[$ et $]e;+\infty[$.

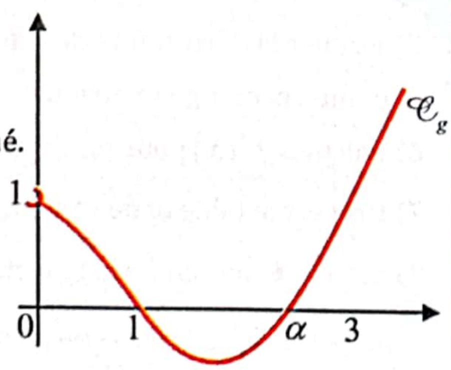
c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

Deuxième Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$$

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $]0;+\infty[$ de l'équation : $g(x)=0$.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	- 0,14	- 0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α telle que : $g(x)=0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in D_f$:

$$f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ aux deux points d'abscisses 1 et α.

c) Déterminer, à partir de la courbe $\mathscr{C}_g$, le signe de $g(x)$ sur $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x)-x\leq 0$ pour tout $x\in[1;\alpha]$.

3) Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=2 \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\leq u_n\leq\alpha$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

PROBLÈME 1

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x$$

1) Vérifier que : $g(1)=0$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g en-dessous :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Montrer que $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0;1]$ et que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=x$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$$

b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que pour tout $x\in[1;2]$: $f(x)\leq x$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5) Construire (D) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\sqrt{3}\ \text{ et }\ u_{n+1}=f(u_n)\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\leq u_n\leq 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 4) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen National 2017 (Session Normale)

PROBLÈME 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$$

Le tableau en-dessous donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) Déduire à partir du tableau que :

$$g(x)>0 \text{ pour tout } x\in\,]0;+\infty[$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (Pour calculer la limite, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right])$$

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinages de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ f'(x)=g(x)$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Montrer que $y=x-1$ est une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ce point.

c) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 3

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-x+x\ln x$$

1) a) Montrer que $g'(x)=\ln x$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$.

b) Montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que :

$$(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ \ g(x)\geq0$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

(Pour calculer la limite, remarquer que :

$$f(x)=\frac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$. En déduire la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2g(x)}{x^3}$.

b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$

c) Montrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

4) Construire $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ a deux points d'inflexion dont l'un a pour abscisse 1 et l'autre a une abscisse comprise entre 2 et 2,5. On prend : $f(0,3)\approx0$).

5) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

a) Montrer que la fonction f est paire et que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ h(x)=f(x)$$

b) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$.

En déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) Vérifier que $g(1)=0$ et en déduire que :

- $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1]$.
- $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in [1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. (On pourra poser $t=\sqrt{x}$)

c) Déterminer la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ puis en déduire que :

- la fonction f est décroissante sur $]0;1]$.
- la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f(x)\ge 2$$

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer)

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 5

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-x-\ln x$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$$

b) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$$

et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

(Remarquer que : $g(1)=0$)

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

(Remarquer que : $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$$

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln x}{x}$$

et en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que $y=2x-2$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet $A(1;0)$ comme unique point d'inflexion).

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis en déduire que $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1[$.

2) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$).

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ et interpréter géométriquement $f'(1)=0$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f puis montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\ge 0$.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 7

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+3$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

b) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$

sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que la fonction g st décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ puis en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $y=3(x-1)$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-1-2\ln^2x+2\ln x$$

Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

b) Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

4) Construire $(\mathscr{D})$ et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2018 (Session De Rattrapage)