

Exercice 1 :

1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$.

- ① - a - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
b - Etudier les variations de la fonction g .
- ② - Calculer $g(1)$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2^{ème} partie :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$.

- ① - Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
- ② - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier la branche infinie de courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- ③ - a - Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.
b - En déduire les variations de f sur D_f .
- ④ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3^{ème} partie :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]0; 1]$.

- ① - Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- ② - Tracer $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 2 :

1^{ère} partie :

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 + x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- ① - Déterminer D_f .
- ② - a - Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0$.
b - En déduire que la fonction f continue à droite du point $x_0 = 0$.
c - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.
- ③ - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- ④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$, et étudier les variations de la fonction f .
- ⑤ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.
b - Etudier la concavité de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥- a - Déterminer d'équation de la droite (Δ) tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b - Etudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .

⑦- Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

⑧- a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b - Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .

c - Calculer $(f^{-1})'(1)$.

d - Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

☺ 2^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

①- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{e} \leq u_n \leq 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

🔗 Exercice 3 :

☺ 1^{ère} partie :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln x$.

①- Déterminer D_g , puis trouver les limites de f aux bornes de D_g .

②- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g$, et étudier les variations de la fonction g .

③- En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : \ln x < x$.

☺ 2^{ème} partie :

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

①- Déterminer D_f .

②- a - Montrer que la fonction f est continue en 0 à droite.

b - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

④- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$, et étudier les variations de la fonction f .

⑤- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

⑥- Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prends $e \approx 2,7$ et $\ln 2 \approx 0,7$).