Fonctions logarithmes

EL KYAL MOHAMED

Fonction Logarithme népérienne :

- **Définition :**

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 et notée **ln**

- **Conséquences et propriétés :**

$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \qquad r \in \mathbb{Q}$ $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

- **Domaine de définition :**

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	

- **Limites usuelles :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0$	
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

- **Continuité:**

La fonction ln est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I
et si u est continue sur I
alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur I

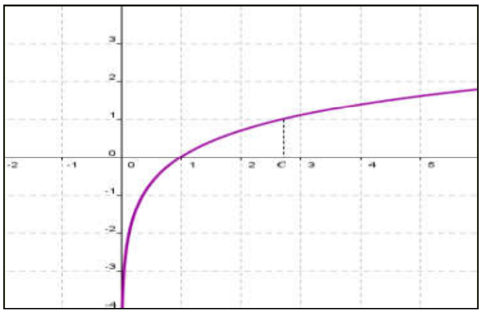
- ***Dérivabilité :***

> *La fonction ln est dérivable sur l'intervalle* $]0;+\infty[$
>
> *et on a :* $\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

> *Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est dérivable sur I*
>
> *alors la fonction* $x \mapsto \ln[u(x)]$ *est dérivable sur I*
>
> *et on a :* $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

- ***Signe et représentation graphique de ln :***

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	‖ -	0	+



➢ Fonction Logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

- ***Définition :***

> *La fonction **logarithme de base** a est la fonction*
>
> *définie par :* $\forall x \in]0;+\infty[\quad \ell og_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier *: si a=10,* ℓog_a *est le logarithme décimal. On le note* ℓog

- ***Conséquences et propriétés :***

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ell og_a(xy) = \ell og_a(x) + \ell og_a(y)$ $\ell og_a(x^r) = r\ell og_a(x) \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ell og_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell og_a(x)$ $\ell og_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a(x) - \ell og_a(y)$	$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$ $\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a(x) = \ell og_a(y) \Leftrightarrow x = y$ $\ell og_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\ell og_a(x) > \ell og_a(y) \Leftrightarrow x < y$	$\ell og_a(x) > \ell og_a(y) \Leftrightarrow x > y$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} \ell og_a(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} \ell og_a(x) = -\infty$
$\forall x \in]0,+\infty[\quad [\ell og_a(x)]' = \dfrac{1}{x\ln a}$	