

## Primitives d'une fonction

### 1) Définition.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On appelle fonction **primitive**, ou primitive de  $f$  sur  $I$ , toute fonction  $F$  définie et **dérivable** sur  $I$  telle que :

$$(\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$$

### 2) Propriétés.

**Propriété1 :** Toute fonction **continue** (dérivable) sur un intervalle  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

**Propriété2:** Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$ .

- L'ensemble des primitives de  $f$  sur l'intervalle  $I$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $I$  par:  
 $x \mapsto F(x) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .
- En particulier, si  $a \in I$  et  $b \in \mathbb{R}$ , alors il existe une unique primitive de  $f$  sur  $I$  telle que:  $f(a) = b$ .

**Propriété3:** Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$  alors  $G$  est une autre primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :  $G(x) = F(x) + k$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

### 3) Propriétés de calculs sur les primitives.

Primitives des fonctions usuelles	
$f(x)$	$F(x)$
$k$	$k \cdot x + c$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$

- Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $I$ . - $U$ et $V$ des primitives de $u$ et $v$ sur $I$	
$f(x)$	$F(x)$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x) + c$
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot U(x) + c$
$u' \times u$	$\frac{1}{2} u^2 + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt[n]{u(x)}}$	$n \cdot \sqrt[n]{u(x)} + c$
$u' \times u^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$ .

1)  $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

2)  $f : x \mapsto \frac{3}{x^2}$  sur  $I = [1; +\infty[$ .

3)  $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$  sur  $I = [1; +\infty[$ .

4)  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

5)  $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

6)  $h : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 - 3)^3}$  sur  $I = [4; +\infty[$ .

7)  $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

8)  $f : x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

9)  $f : x \mapsto \tan^2(x)$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

10)  $f : x \mapsto x^2(2x - 1)$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

### Exercice2:

Soit  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$  définie sur  $I = [3; +\infty[$ .

1) Déterminer  $a, b$  et  $c$  de façon que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

2) Calculer les primitives de  $f$  sur  $I = [3; +\infty[$ .

3) En déduire la primitive  $F$  de  $f$  sachant que

$$F(3) = \frac{11}{2}.$$

### Exercice3:

1) Déterminer les primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos 2x}$  sur

l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

2) Déterminer la primitive  $F$  de  $f : x \mapsto x^3(x^4 - 1)$  tel que  $F(0) = -1$ .

3) Déterminer  $a, b$  et  $c$  de façon que :

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$  soit une primitive de la fonction  $f : x \mapsto x\sqrt{3 - 2x}$ .

Every one thinks of changing the world , but no one thinks of changing himself.