

Exercice 1 : (BAC 2007 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_n + n - 1$.

① - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

② - a - Calculer v_n en fonction de n .

b - En déduire u_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

③ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $T_n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n} \right)$ et $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Exercice 2 : (BAC 2008 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$, puis Calculer v_n en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ puis Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3 : (BAC 2009 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$.

puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 - u_n > 0$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$, puis Calculer v_n en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$, en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 : (BAC 2010 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - 1 > 0$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ puis en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

③ - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$, tel que (w_n) est la suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = \ln(u_n)$.

Exercice 5 : (BAC 2010 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.

② - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$.

③ - Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

④ - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

b - Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6 : (BAC 2011 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{8u_n + 5} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{u_n} + 2$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison 5, puis Calculer v_n en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 7 : (BAC 2011 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{6u_n}{15u_n + 1}$ et $u_0 = 1$.

① - a - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.

b - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \frac{1}{3}$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$.

Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$, puis Calculer v_n en fonction de n .

③ - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 8 : (BAC 2012 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ et $u_0 = 11$.

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$.

② - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 12$.

b - Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante

c - Dédire que la suite (u_n) est convergente.

③ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 12$.

a - En utilisant la question ① Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$, puis

Calculer v_n en fonction de n .

b - Calculer u_n en fonction de n , puis calculer sa limite.

Exercice 9 : (BAC 2012 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ et $u_0 = 3$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$. Et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - v_n > 0$.

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

- ③ - a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$, puis Calculer v_n en fonction de n .
 b - Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 10 : (BAC 2013 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}$ et $u_1 = 0$.

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$.

puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 5 - u_n > 0$.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{5}{5 - u_n}$.

a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$, puis vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - v_n = 1$

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = n$, En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 5 - \frac{5}{n}$.

c - Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 11 : (BAC 2013 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ et $u_0 = 2$.

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$.

② - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$.

b - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c - Montrer que la suite (u_n) est convergente.

③ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 1$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$, puis Calculer v_n en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 12 : (BAC 2014 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$ et $u_0 = 13$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 14$.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 14 - u_n$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis Calculer v_n en fonction de n .

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

c - Calculer la petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 13,99$.

Exercice 13 : (BAC 2014 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$ et $u_1 = 5$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 2$.

② - Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{3}{u_n - 2}$.

a - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$, puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b - Ecrire (v_n) en fonction de n , en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 2 + \frac{3}{n}$.

c - Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 14 : (BAC 2015 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ et $u_0 = 4$.

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 5$.

② - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$, En déduire que la suite (u_n) est croissante.

③ - En déduire que (u_n) est convergente.

④ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 5 - u_n$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n .

b - En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$, puis calculer la limite de (u_n) .

Exercice 15 : (BAC 2016 Session normale)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$ et $u_0 = 2$.

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$, puis montrer par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 3$.

② - Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$, puis écrire u_n en fonction de n .

c - Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 16 : (BAC 2016 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1.$

b - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1),$ puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c - En déduire que (u_n) est convergente.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 1.$

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16},$ puis écrire v_n en fonction de $n.$

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n,$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n).$

Exercice 17 : (BAC 2017 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 17 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 16.$

b - Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et déduire que la suite (u_n) est convergente.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 16.$

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique .

b - Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n,$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n).$

c - Calculer la petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,0001.$