LIMITES DE SUITES
CORRECTION

Exercice n°1

1) Puisque 2>1, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

2) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on conclut que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3) Puisque $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et par suite $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 7}$

4) Puisque $-2 < -1$, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (-2)^n$ n'admet pas de limite, donc (u_n) non plus

5) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n - 4^n = 5^n\left(1 - \frac{4^n}{5^n}\right) = 5^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

Puisque $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

6) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n + 2}{8^n - 1} = \frac{3^n\left(1 + \frac{2}{3^n}\right)}{8^n\left(1 - \frac{1}{8^n}\right)} = \left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}}$

Puisque 3>1, $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3^n} = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{3^n} = 1$. Puisque 8>1, $\lim_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8^n} = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{8^n} = 1$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}} = \frac{1}{1} = 1$. Enfin, puisque $-1 < \frac{3}{8} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

Par produit, on conclut donc que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

7) $\lim_{n\to+\infty} n + 3 = +\infty$ donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

8) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, donc par quotient, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$

9) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = \frac{n^2\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{n\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - 1}$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = -2$, et par produit, on conclut que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Exercice n°2

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leq\cos n\leq 1$, donc $-\frac{1}{n}\leq\frac{\cos n}{n+1}\leq\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{n}\leq u_n\leq\frac{1}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de u_n : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq|\cos n|\leq 1$ donc $0\leq|u_n|\leq\frac{1}{n+1}$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on en déduit, toujours grâce au même théorème, que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin 2n\geq -1$, donc $n+\sin 2n\geq n-1$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}n-1=+\infty$, le théorème de minoration nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leq(-1)^n\leq 1$, donc $n-1\leq n+(-1)^n\leq n+1$ donc $\frac{n-1}{n^2+1}\leq\frac{n+(-1)^n}{n^2+1}\leq\frac{n+1}{n^2+1}$, c'est-à-dire $\frac{n-1}{n^2+1}\leq u_n\leq\frac{n+1}{n^2+1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de u_n : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\left|n+(-1)^n\right|\leq n+1$ donc $0\leq\left|\frac{n+(-1)^n}{n^2+1}\right|\leq\frac{n+1}{n^2+1}$ c'est-à-dire $0\leq|u_n|\leq\frac{n+1}{n^2+1}$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on en déduit, toujours grâce au même théorème, que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leq(-1)^n\leq 1$, donc $n+(-1)^n\geq n-1$. De plus $1\leq(-1)^n+2\leq 3$ donc $1\geq\frac{1}{(-1)^n+2}\geq\frac{1}{3}$. En multipliant entre elles les inégalités $1\geq\frac{1}{(-1)^n+2}\geq\frac{1}{3}$ et $n+(-1)^n\geq n-1$ entre quantités positives, on obtient la relation R): $u_n\geq\frac{n-1}{3}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{3}=+\infty$, par application du théorème de minoration, on conclut $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Exercice n°3

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1}}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)\boxed{=\frac{1}{3}v_n}$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-3=6-3=3$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n\boxed{=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$. Comme $v_n=u_n-3$, on aura $u_n=v_n+3=\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3}$

c) Puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0}$. Grâce à l'égalité $u_n=v_n+3$, on déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si on note $S_n=v_0+v_1+.......+v_n$, alors $S_n=v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\boxed{=\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$

Puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=1$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{9}{2}$

Exercice n°4

Notons Q_n la propriété « $n \leq u_n$ » et montrons que la propriété Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

L'hypothèse $u_0 = 1 > 0$ assure que la propriété Q_0 est vraie

Hérédité

Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $p \leq u_p$. On déduit alors de cette inégalité $2p + 1 - p \leq 2u_p + 1 - p$, c'est-à-dire $p + 1 \leq u_{p+1}$, qui est la propriété Q_{p+1}.

On a donc $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} n = +\infty$, on conclut, par minoration, que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice n°5

1) Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On calcule successivement $u_0 = 0$,

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1,93,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{63} \approx 1,98$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{63}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{1}{8}\sqrt{255} \approx 1,996$$

b) Il semble que la suite (u_n) tende vers 2

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 12\right) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = {}_4\left(u_n - 4\right) = {}_4 v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. De l'égalité $v_n = u_n^2 - 4$ on tire $u_n = \pm\sqrt{v_n + 4}$

Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a $u_n = \sqrt{v_n + 4}$, et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, on déduit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2}$

Exercice n°6

Notons Q_n la propriété « $n \leq u_n$ » et montrons que la propriété Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

L'hypothèse $u_0 = 0$, c'est-à-dire $0 \leq u_0 < 2$ assure que la propriété Q_0 est vraie

Hérédité

Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $0 \leq u_p < 2$. On déduit alors de cette inégalité $0 + 2 \leq u_p + 2 < 2 + 2$, puis, par stricte croissance de la fonction racine, $2 \leq \sqrt{u_p + 2} < \sqrt{4}$ c'est-à-dire $0 \leq u_{p+1} < 2$, qui est la propriété Q_{p+1}. On a donc $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n<2 \Leftrightarrow v_n>0$

b) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on calcule :

$v_{n+1}=2-u_{n+1}=2-\sqrt{2+u_n}=\dfrac{\left(2-\sqrt{2+u_n}\right)\left(2+\sqrt{2+u_n}\right)}{2+\sqrt{2+u_n}}$ (multiplication par la quantité conjuguée)

$=\dfrac{(2)^2-\left(\sqrt{2+u_n}\right)^2}{2+\sqrt{2+u_n}}=\dfrac{4-(2+u_n)}{2+\sqrt{2+u_n}}=\dfrac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}}=\dfrac{v_n}{2+\sqrt{2+u_n}}$

Et puisque pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n$, alors $2+\sqrt{2+u_n}\ge 2$ et ainsi $\dfrac{1}{2+\sqrt{2+u_n}}\le\dfrac{1}{2}$.

Par multiplication par $v_n>0$, on conclut $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2+\sqrt{2+u_n}}=v_n\times\dfrac{1}{2+\sqrt{2+u_n}}\le v_n\times\dfrac{1}{2}$.

Puisque $v_n>0$, l'inégalité $v_{n+1}\le v_n\times\dfrac{1}{2}$ est équivalente à $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\le\dfrac{1}{2}$

Notons Q_n la propriété « $v_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ »

<u>Initialisation</u> : L'hypothèse $u_0=0\Leftrightarrow v_0=2$, et le calcul $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$ assurent $v_0\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0-1}$ cest-à-dire que la propriété Q_0 est vraie.

<u>Hérédité :</u> Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p\in\mathbb{N}$, à savoir $v_p\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}$.

On utilise alors l'inégalité $\dfrac{v_{p+1}}{v_p}\le\dfrac{1}{2}$, qui nous permet d'écrire :

$$\dfrac{v_{p+1}}{v_p}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow v_{p+1}\le\dfrac{1}{2}\underbrace{v_p}_{\text{hypothèse de}}$$

$$\Leftrightarrow v_{p+1}\le\dfrac{1}{2}\times\overbrace{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}}^{\text{récurrence}}$$

$\Leftrightarrow v_{p+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p}$, qui est la propriété Q_{p+1}. On a donc $Q_p\Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Puisque $v_n>0$, on a donc $0<v_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

<u>Exercice n°7</u>

1) a) Démontrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n<4$. Notons Q_n la propriété « $0\le u_n<4$ »

La propriété Q_0 est vraie d'après les données de l'énoncé. Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p\in\mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $0\le u_p<4$. On a alors $3\times0+4\le3\times u_p+4<3\times4+4$, c'est-à-dire $4\le 3u_p+4<16$ puis $\sqrt{4}\le\underbrace{\sqrt{3u_p+4}}_{u_{p+1}}<\sqrt{16}$ (par stricte croissance de la fonction racine). On se retrouve donc avec $0\le u_{p+1}<4$, qui est la propriété Q_{p+1}, ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

b) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<u_{n+1}$. Notons Q_n la propriété « $u_n<u_{n+1}$ »

On calcule $u_1=\sqrt{3u_0+4}=\sqrt{3\times0+4}=\sqrt{4}=2$, et ainsi, puisque $u_0<u_1$, la propriété Q_1 est vraie

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $u_p < u_{p+1}$

On a alors $3u_p + 4 < 3u_{p+1} + 4$ puis par stricte croissance de la fonction racine, $\sqrt{3u_p+4} < \sqrt{3u_{p+1}+4}$, c'est-à-dire $u_{p+1} < u_{p+2}$, qui est la propriété Q_{p+1}, ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

c) La suite (u_n) est strictement croissante et majorée (par 4). Elle est donc convergente.

Notons L la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$, donc L vérifie l'égalité $L = \sqrt{3L+4}$

On résout l'équation $L \quad \sqrt{\ L\quad} = \quad {}^2 + 3 \quad 4 \Rightarrow L \quad L - \quad = \quad 3$

On trouve L = -1 ou L=4 0 en calculant son discriminant.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, la limite de (u_n) ne peut être que 4. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\frac{4-u_{n+1}}{4-u_n} = \frac{4-\sqrt{3u_n+4}}{4-u_n} = \frac{\left(4-\sqrt{3u_n+4}\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)}{\left(4-u_n\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)} = \frac{4^2-\left(\sqrt{3u_n+4}\right)^2}{\left(4-u_n\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)}$$

$$= \frac{16-(3u_n+4)}{\left(4-u_n\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)} = \frac{12-3u_n}{\left(4-u_n\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)} = \frac{3\left(4-u_n\right)}{\left(4-u_n\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)} = \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on aura $\sqrt{3u_n+4} \geq \sqrt{4}$ donc $4+\sqrt{3u_n+4} \geq 6$ donc $\dfrac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \dfrac{1}{6}$ et en multipliant par 3, $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \dfrac{3}{6}$, donc $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \dfrac{1}{2}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4 \Leftrightarrow 4-u_n > 0$, l'inégalité $\dfrac{4-u_{n+1}}{4-u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ est équivalente à $\boxed{4-u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(4-u_n\right)}$

b) Démontrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4-u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(4-u_0\right)$

Notons Q_n la propriété « $4-u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(4-u_0\right)$ »

La propriété Q_0 est vraie car $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \left(4-u_0\right) = 4-u_0$

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $4-u_p \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^p \left(4-u_0\right)$

En multipliant par $\dfrac{1}{2}$ les deux membres de l'inégalité, on obtient $\dfrac{1}{2}\left(4-u_p\right) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1} \left(4-u_0\right)$, et puisque $4-u_{p+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(4-u_p\right)$, on obtient $4-u_{p+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1} \left(4-u_0\right)$, qui est la propriété Q_{p+1}, ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 4-u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(4-u_0\right) \Leftrightarrow 0 < 4-u_n \leq 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, on applique le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-u_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

On retrouve bien le résultat du 1) c)

c) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 4-u_n \leq 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, on obtient $0 < n^2\left(4-u_n\right) \leq \dfrac{4n^2}{2^n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2}{2^n} = 0$ (par croissance comparée), on applique le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(4-u_n\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

Exercice n°8

1) Notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 3$ » et démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : La propriété est vraie pour $n=0$ puisque $u_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq u_0 \leq 3$

Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 3$.

On écrit alors successivement :

$0 \leq u_n \leq 3$

$\Rightarrow 2\times 0 + 3 \leq 2u_n + 3 \leq 2\times 3 + 3$

c'est-à-dire $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$, et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, on obtient $\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n+3} \leq \sqrt{9}$, c'est-à-dire $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$, ce qui prouve que la propriété P(n+1) est vraie.

En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$

2) Notons $P(n)$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ » et démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

La propriété est vraie pour $n=0$ puisque $u_1 = \sqrt{2u_0+3} = \sqrt{3} \Rightarrow u_0 \leq u_1$

Hérédité :

Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$.

On écrit alors successivement :

$u_n \leq u_{n+1}$

$\Rightarrow 2\times u_n + 3 \leq 2u_{n+1} + 3$'

et utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, on obtient $\sqrt{2\times u_n+3} \leq \sqrt{2u_{n+1}+3}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve que la propriété P(n+1) est vraie.

En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire : La suite u est strictement croissante.

3) Puisque u est strictement croissante et majorée, elle converge vers une limite l.

Puisque pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \rightarrow \sqrt{2x+3}$, qui est continue sur $[0;+\infty[$, la limite l vérifie $l = f(l)$. On résout l'équation $l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0$ et $l > 0$, en calculant le discriminant de l'équation. On obtient $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 = 4^2$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes. $l_1 = \dfrac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$ et $l_2 = \dfrac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$. La condition $l > 0$ (et par ailleurs le fait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) entraîne le fait que : la limite de la suite u est 3.

Exercice n°9

1) On calcule successivement $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{3u_0+2}{u_0+2} = \dfrac{3\times 1+2}{1+2} = \dfrac{5}{3}$, $u_2 = \dfrac{3u_1+2}{u_1+2} = \dfrac{3\times\frac{5}{3}+2}{\frac{5}{3}+2} = \dfrac{7}{\frac{11}{3}} = \dfrac{21}{11}$ et

$$u_3 = \frac{3u_2+2}{u_2+2} = \frac{3\times\frac{21}{11}+2}{\frac{21}{11}+2} = \frac{\frac{85}{11}}{\frac{43}{11}} = \frac{85}{11}\times\frac{11}{43} = \frac{85}{43}$$

2) Notons Q_n la propriété « $0 < u_n < 2$ ». La propriété Q_0 est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé.

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $0 < u_p < 2$.

Alors $u_{p+1} - 2 = \dfrac{3u_p+2}{u_p+2} - 2 = \dfrac{3u_p+2-2(u_p+2)}{u_p+2} = \dfrac{u_p-2}{u_p+2}$. Puisque $0 < u_p < 2$, on peut en déduire que $u_{p+1} - 2 < 0$, donc que $u_{p+1} < 2$. D'autre part $u_{p+1} > 0$ car $u_p > 0$.

Ainsi, on trouve la propriété Q_{p+1}, ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence

3) On calcule le discriminant du polynôme $P(x)=-x^2+x+2$: $\Delta=1^2-4\times(-1)\times2=9$. Le polynôme admet deux racines distinctes réelles qui sont $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)}=2$

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré, $P(x)<0$ sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $P(x)>0$ sur $]1;2[$

4) On calcule $u_{n+1}-u_n$: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n\le 2$ et puisque pour tout $x\in[0,2]$, $-x^2+x+2\ge0$, on substitute u_n à x

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\ge0$. La suite (u_n) est donc croissante.

5) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on calcule $\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-2}{u_n-2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2-2(u_n+2)}{u_n+2}}{u_n-2}=\dfrac{u_n-2}{(u_n+2)(u_n-2)}$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq2$, on peut simplifier $\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\dfrac{u_n-2}{(u_n+2)(u_n-2)}=\dfrac{1}{u_n+2}$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$, on aura $2<u_n+2<4$ donc $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{u_n+2}<\dfrac{1}{2}$, ainsi que $\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}>0$, donc $\dfrac{|u_{n+1}-2|}{|u_n-2|}=\left|\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}\right|=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}$ car $\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}>0$. Finalement, $\dfrac{|u_{n+1}-2|}{|u_n-2|}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_n-2}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|u_{n+1}-2|<\dfrac{1}{2}|u_n-2|$

6) Notons Q_n la propriété « $|u_n-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-2|$ »

La propriété Q_0 est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé, car $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0|u_0-2|=|u_0-2|$

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p\in\mathbb{N}$, à savoir $|u_p-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^p|u_0-2|$.

Alors en multipliant chaque membre de l'inégalité $|u_p-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^p|u_0-2|$ par $\dfrac{1}{2}$, on obtient $\dfrac{1}{2}|u_p-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}|u_0-2|$

Et puisque $|u_{p+1}-2|<\dfrac{1}{2}|u_p-2|$, on en déduit $|u_{p+1}-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}|u_0-2|$, qui est la propriété Q_{p+1}

Ceci achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

7) La suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Pour déterminer sa limite,on peut :

- soit utiliser la propriété : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-2|$. Puisque $-1<\dfrac{1}{2}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-2|=0\Leftrightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2}$

- soit noter sa limite L. Puisque (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$ qui est continue sur $[0,2]$, la limite L vérifie $f(L)=L\Leftrightarrow\dfrac{3L+2}{L+2}=L\Leftrightarrow3L+2=L(L+2)\Leftrightarrow L^2-L-2=0$. En calculant son disciminant, on résout cette équation. On trouve $L=-1$ ou 2. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$, la limite ne peut être que $\boxed{L=2}$

Exercice n°10

1) De l'égalité $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, on en déduit $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$. Ainsi, $u_0 = 2\cos\theta$,

puis $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

Puisque $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{4}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \ge 0$, et ainsi $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2}$ donc $u_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$

Ensuite $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2^2}} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2^2}\right|$

Puisque $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \le \frac{\theta}{2^2} \le \frac{\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \ge 0$, et ainsi $\left|\cos\frac{\theta}{2^2}\right| = \cos\frac{\theta}{2^2}$ donc $u_2 = 2\cos\frac{\theta}{2^2}$

Enfin, $u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\theta}{2^3}} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2^3}} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^3}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2^3}\right|$

Puisque $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \le \frac{\theta}{2^3} \le \frac{\pi}{16}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \ge 0$, et ainsi $\left|\cos\frac{\theta}{2^3}\right| = \cos\frac{\theta}{2^3}$ donc $u_3 = 2\cos\frac{\theta}{2^3}$

2) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Notons Q_n la propriété « $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ ». La propriété est vraie pour $n = 0,1,2,3$ d'après les calculs ci-dessus

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_p = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$

Alors, puisque $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, on calcule :

$$u_{p+1} = \sqrt{2+u_p} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^p}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2^{p+1}}\right|$$

Puisque $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \le \frac{\theta}{2^{p+1}} \le \frac{\pi}{2^p}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right) \ge 0$, et ainsi $\left|\cos\frac{\theta}{2^{p+1}}\right| = \cos\frac{\theta}{2^{p+1}}$ donc $u_{p+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{p+1}}$

C'est la propriété Q_{p+1}, qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

3) Puisque 2>1, $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta}{2^n} = 0$

4) Par composition avec la fonction cosinus qui est continue en 0, on trouve $\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos(0) = 1$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2$. Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$

Exercice n°11

1) Démontrons **par récurrence sur *n*** que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$. Notons $P(n)$ la propriété « « $u_n>0$ »

Initialisation : La propriété est vrai pour *n*=0 d'après l'énoncé.

Hérédité : Supposons maintenant que $P(k)$ soit vraie pour un certain entier $k>0$. Alors :

$u_k>0\Rightarrow\dfrac{3}{u_k}>0\Rightarrow u_k+\dfrac{3}{u_k}>0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\left(u_k+\dfrac{3}{u_k}\right)>0$, c'est-à-dire $u_{k+1}>0$. Ainsi $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. L'hérédité est ainsi démontrée. En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour que la suite soit stationnaire, il est nécessaire et suffisant que $u_0=\sqrt{3}$.

En effet, supposons que $u_0=\sqrt{3}$. Montrons alors que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sqrt{3}$. Par récurrence sur *n*, la propriété est vraie, par hypothèse, pour *n*=0, et si on suppose que $u_k=\sqrt{3}$ pour une valeur de *k* donnée, alors $u_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$, ce qui achève la phase d'hérédite et la démonstration par récurrence.

Réciproquement, si la suite est stationnaire, cela signifie que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=0$.

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n}\right)-u_n=-\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{3}{2u_n}=\dfrac{-u_n^2+3}{2u_n}$. Ainsi si la suite est stationnaire, cela entraine que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0\Leftrightarrow u_n=\sqrt{3}$. En particulier, pour *n*=0, $u_0=\sqrt{3}$

$\boxed{\text{En conclusion, seule la valeur } u_0=\sqrt{3} \text{ rend la suite stationnaire}}$

2) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, on calcule $\boxed{u_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n}\right)-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n^2+3\right)-2\sqrt{3}u_n\right]=\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2\right]}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, on calcule $\boxed{u_{n+1}+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n}\right)+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n^2+3\right)+2\sqrt{3}u_n\right]=\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n+\sqrt{3}\right)^2\right]}$

b) $\forall n\geq 1$, on reprend le calcul de $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n}\right)-u_n=-\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{3}{2u_n}=\dfrac{-u_n^2+3}{2u_n}$

D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2\right]$. Puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$ (question 1) et $\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2\geq 0$, on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq\sqrt{3}$. De plus, cette inégalité est en fait stricte car s'il existe un indice *k* tel que $u_k=\sqrt{3}$, alors pour tout $n\geq k$, on aurait $u_n=\sqrt{3}$ (démonstration par récurrence de la question 1). La suite serait donc stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui est exclu puisque $u_0=1\neq\sqrt{3}$. En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>\sqrt{3}$, ce qui se réécrit $\forall n\geq 1,\ u_n>\sqrt{3}\Rightarrow 3-u_n^2<0$. Ainsi $\boxed{\forall n\geq 1,\ u_{n+1}-u_n<0\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n \text{, ce qui assure la décroissance de la suite pour } \forall n\geq 1}$.

c) La suite est décroissante pour $\forall n\geq 1$ et minorée par $\sqrt{3}$ (puisque $\forall n\geq 1,\ u_n>\sqrt{3}$) donc converge vers une limite *l* qui vérifie $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{3}{l}\right)\Leftrightarrow l=\dfrac{3}{l}\Leftrightarrow l^2=3$. Des deux solutions de cette équation ($l=-\sqrt{3}$ ou $l=\sqrt{3}$), seule la deuxième est possible car $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$, donc nécessairement, $l\geq 0$. $\boxed{\text{Ainsi, la suite converge vers } \sqrt{3}}$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, on calcule $\boxed{v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}+\sqrt{3}}=\dfrac{\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2\right]}{\dfrac{1}{2u_n}\left[\left(u_n+\sqrt{3}\right)^2\right]}=\dfrac{\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2}{\left(u_n+\sqrt{3}\right)^2}=\left(\dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\right)^2=v_n^2}$

Démontrons par récurrence que $\boxed{\forall n\geq 1,\ v_n=\left(v_1\right)^{2^{n-1}}}$.

La propriété est vraie pour $n=1$, puisque $(v_1)^{2^{1-1}}=(v_1)^{2^0}=(v_1)^1=v_1$. Supposons que pour un entier $k\geq 1$ fixé, on ait $v_k=(v_1)^{2^{k-1}}$, alors puisque $v_{k+1}=v_k^2$, on aura $v_{k+1}=(v_k)^2=\left((v_1)^{2^{k-1}}\right)^2=(v_1)^{2^{k-1}\times 2}=(v_1)^{2^{k-1+1}}=(v_1)^{2^k}$, ce qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

b) Puisque $v_1=\frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, on a $-1<v_1<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_1)^{2^{n-1}}=0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0}$. En utilisant l'expression de la suite *v* en fonction de la suite *u*, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}=0$. Mais puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n+\sqrt{3}>0$, on a l'équivalence $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n-\sqrt{3}=0$ et on retrouve bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}}$.

<u>Exercice n°12</u>

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on calcule

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+3v_n)-\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=\frac{1}{12}(3u_n+9v_n)-\frac{1}{12}(4u_n+8v_n)$$

$$=\frac{1}{12}\left[(3u_n+9v_n)-(4u_n+8v_n)\right]=\frac{1}{12}[3u_n+9v_n-4u_n-8v_n]=\frac{1}{12}[-u_n+v_n]=\frac{1}{12}w_n$$

La suite *w* est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0=v_0-u_0=11$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$, ce qui assure que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$

b) Puisque $-1<\frac{1}{12}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

2) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)-u_n=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)-\frac{3}{3}u_n=\frac{1}{3}(u_n+2v_n-3u_n)=\frac{1}{3}(2v_n-2u_n)=\frac{2}{3}w_n$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$. La suite *u* est donc (strictement) croissante

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}(u_n+3v_n)-v_n=\frac{1}{4}(u_n+3v_n)-\frac{4}{4}v_n=\frac{1}{4}(u_n+3v_n-4v_n)=\frac{1}{4}(u_n-v_n)=-\frac{1}{4}w_n$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n<0\Leftrightarrow v_{n+1}<v_n$. La suite *v* est donc (strictement) décroissante

c) Puisque la suite *u* est croissante, tous les termes u_n sont supérieurs ou égaux au premier terme u_0

Puisque la suite *v* est décroissante, tous les termes v_n sont inférieurs ou égaux au premier terme v_0

Enfin, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n\geq 0$, ceci se traduit par l'inégalité $u_n\leq v_n$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\boxed{u_0\leq u_n\leq v_n\leq v_0}$

3) Puisque la suite *u* est croissante, la suite *v* est décroissante, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$, les deux suites *u* et *v* sont adjacentes, donc sont convergentes vers une même limite l

4) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on calcule :

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=3\times\frac{1}{3}(u_n+2v_n)+8\times\frac{1}{4}(u_n+3v_n)=u_n+2v_n+2(u_n+3v_n)$$

$$=u_n+2v_n+2u_n+6v_n=3u_n+8v_n=t_n$$

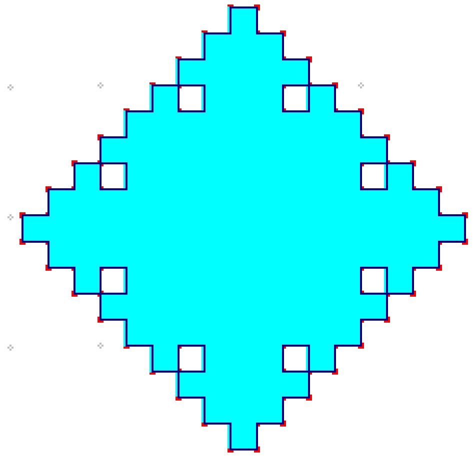
La suite (t_n) est donc constante. Cette constante est égale à son premier terme !

On calcule $t_0=3u_0+8v_0=3\times 1+8\times 12=99$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t_n=99$

b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{3u_n+8v_n}_{t_n}=3l+8l=11l$ donc $11l=99\Leftrightarrow\boxed{l=9}$

Exercice n°13



1) F_3 :

2) a) (c_n) est une suite géométrique de premier terme $c_1 = 4$ et de raison 5 donc $c_n = 4\times 5^{n-1}$.

b) (l_n) est une suite géométrique de premier terme $l_1 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$ donc $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

c) $p_n = c_n l_n$ donc $p_n = 4\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

3) $\frac{5}{3} > 1$ donc (p_n) diverge.

4) A l'étape $n+1$, on ajoute c_n carrés d'aire l_{n+1}^2. D'où $A_{n+1} = A_n + c_n l_{n+1}^2 = A_n + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$.

5) $A_n = 1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^2+\ldots+\frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} = 1+\frac{4}{9}\left[\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}\right] = 2-\left(\frac{5}{9}\right)^n$.

6) $\frac{5}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 2$.

7) La "figure limite" a un périmètre infini mais une aire finie.