

### Suite Majorée, Minorée, Bornée.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite :

- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Majorée si  $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq M$ .
- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Minorée si  $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq m$ .
- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :  
 $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq M$ .

### Suites Croissante, Décroissante.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite :

- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Croissante si  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \geq u_n$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ .
- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Strictement Croissante si  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} > u_n$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .
- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante si  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ .
- ☆  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Strictement décroissante si  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} < u_n$  ou  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ .

Remarque : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de premier terme  $u_p$ .

- ☆ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite Croissante donc  $u_n \geq u_p$ .
- ☆ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante donc  $u_n \leq u_p$ .

### Suites arithmétiques, Suites géométriques.

	Suite arithmétique	Suites géométriques
Définition	$u_{n+1} - u_n = r$ $r$ est la raison de $u$	$v_{n+1} = qv_n$ $q$ est la raison de $v$
$a, b$ et $c$ trois termes successif	$a + c = 2b$	$a \times c = b^2$
Formule explicite	$u_n = r(n - p) + u_p$ avec $n \geq p$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ avec $n \geq p$
Somme de tous les termes	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \left( \frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$v_p + \dots + v_n = v_p \times \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

### Limite de la Suite géométrique $q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ; \quad q = 1 \\ +\infty & ; \quad q > 1 \end{cases}$$

## Critères de convergence :

### Propriété 1 :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques et  $l$  et  $\alpha$  deux nombres réels tels que :  $\alpha > 0$  et soit  $N \in \mathbb{N}$ .

$$Si : (\forall n \geq N) : \begin{cases} |u_n - l| \leq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

### Propriété 2 :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites numériques et soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $l \in \mathbb{R}$

$$Si : (\forall n \geq N) : \begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

### Propriété 3 :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques et  $\alpha$  un nombre réel tel que :  $\alpha > 0$  et soit  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\star Si : (\forall n \geq N) : \begin{cases} u_n \leq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty .$$

$$\star Si : (\forall n \geq N) : \begin{cases} u_n \geq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty .$$

### Propriété 4 :

- ☆ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ☆ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

## Limite d'une Suite définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Soit  $f$  une fonction numérique définie et continue sur un intervalle  $I$  tel que :  $f(I) \subset I$  .

et soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$  .

Si  $(u_n)$  est convergente, alors sa limite  $l$  est une solution dans  $I$  de l'équation  $f(x) = x$  .