

## Suites numériques

EL KYAL MOHAMED

➤ **Suite arithmétique – Suite géométrique :**

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \left( \frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left( \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$
a ,b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

➤ **Suite majorée, minorée, bornée :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique	
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>majorée</b> par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>minorée</b> par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>bornée</b> si $(u_n)_{n \in I}$ est majorée et minorée

➤ **Monotonie d'une suite :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique	
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>croissante</b> $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>décroissante</b> $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
•	$(u_n)_{n \in I}$ est <b>constante</b> $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

➤ **Limite de la suite  $(n^\alpha)$  avec  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ :**

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

- **Limite de la suite**  $\left(q^n\right)$  avec  $q \in \mathbb{R}$ :

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

- **Critère de convergence d'une suite :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

$$\begin{cases} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

$$\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

- **Suite de type**  $v_n = f(u_n)$ :

Si  $(u_n)_{n \in I}$  une suite convergente de limite  $\ell$  et si  $f$  une fonction continue en  $\ell$   
alors la suite  $(v_n)$  définie par:  $v_n = f(u_n)$  est convergente de limite  $f(\ell)$

- **Suite de type**  $u_{n+1} = f(u_n)$ :

Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ où } f \text{ une fonction}$$

Si :

- $f$  une  $f$  continue sur un intervalle  $I$
- $f(I) \subset I$
- $a \in I$
- $(u_n)$  une convergente

alors : la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est solution de l'équation :  $f(x) = x$