

1.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

- Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.
- Montrer que : la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation.
- Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

2. ..

- Montrer que : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f .
- Montrer que : pour tout x de $]-1, 0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1, 0]$.
- Montrer que : pour tout x de $[1, +\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1, +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $x_0 = 0$.

3. Montrer que : l'équation $x \in]-1; +\infty[; f(x) = x$ admet une solution unique α tel que : $0 < \alpha < 1$.

4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. ..

- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.
- Montrer que : la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J .
- Calculer $(f^{-1})'(\alpha)$ en fonction de α .
- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

2.

PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{2x-1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans

un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

- Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > 0}} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.
- Montrer que : la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction

2. ..

- Montrer que : $f'(x) = \frac{3(x-2)}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ pour tout x de D_f .
- Montrer que la fonction f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et la fonction f est croissante sur $[2, +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

3.

- Montrer que : $\forall x \in D, f''(x) = \frac{3(5-x)}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}$ pour tout x de D_f .
- Etudier le signe de la fonction dérivée seconde de f puis déterminer les coordonnées du point I d'inflexion à la courbe (C_f) .
- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I .

4. Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [2, +\infty[$.

- Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.
- Calculer $g(5)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en 6 puis calculer $(g^{-1})'(6)$.
- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

DEUXIÈME PARTIE

La figure ci-contre représente (C_h) la courbe représentative de la fonction h définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ par :

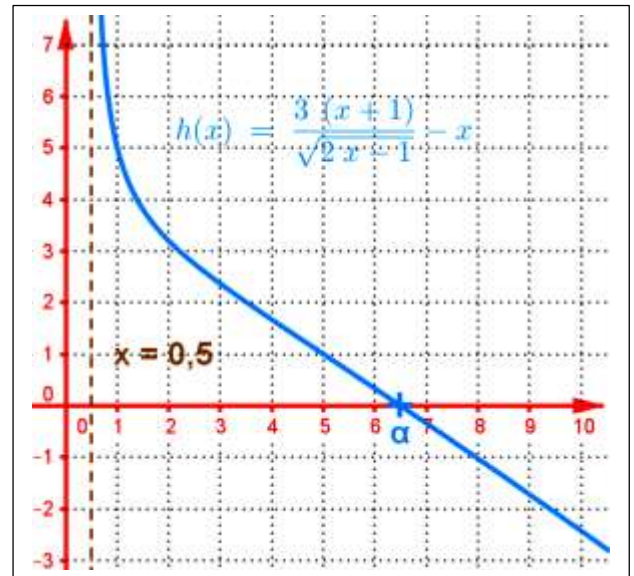
$$h(x) = f(x) - x.$$

1. .



- a. α est un réel tel que : $6,4 < \alpha < 6,5$ (voir la figure) . En déduire graphiquement la seule solution de l'équation $h(x) = 0$ en déduire $f(\alpha)$.
- b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $I = [5, \alpha]$.
- c. Montrer que : $f([5, \alpha]) \subset [5, \alpha]$ (l'image de l'intervalle I par la fonction f (attention f mais pas h))
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- a. Calculer u_1 .
- b. Montrer par récurrence que : $5 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- c. montrer que la suite (u_n) est convergente .
- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente .
- e. Calculer la limite de la suite (u_n) .



3.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).

1. ..

- a. Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.
- b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats .
- c. Montrer que : la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction

2. ..

- a. Montrer que : $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que la fonction f est croissante sur D_f .
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3.

- a. Montrer que : le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .
- b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I .

4. Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5.

- a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .
- b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .
- c. Calculer $f(1)$ puis montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$

4.

On considère la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-1} & ; x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$
, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).

1. ..

- a. Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.
- b. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$.

2. ..

- a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .
- b. Vérifier que : $x + \sqrt{x^2 + 2x} - (2x + 1) = \frac{-1}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}$ pour tout x de $[0, +\infty[$.
- c. En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- d. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

3. ..

- a. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat .
- b. Etudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0 = 0$.
- c. Est-ce que la fonction f est dérivable au point $x_0 = 0$.

4. ..

- a. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que $f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ pour tout x de $]0, +\infty[$, en déduire le signe de sur $]0, +\infty[$.
- b. Vérifier que : $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ pour tout x de $] -\infty, 0[$, en déduire le signe de sur $]0, +\infty[$.
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0, +\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer : $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis $(g^{-1})'(1)$.

d. Déterminer la fonction réciproque g^{-1} .

e. Sans calculer la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ interpréter géométriquement le résultat on utilise le résultat de la question 3. a.

5.

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 et

soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).

1. ..

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

c. Etudier la continuité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$.

2. ..

a. Montrer que la fonction f est dérivable au point $x_0 = 1$ et le nombre dérivé est $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $x_0 = 1$.

c. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$.

d. Est-ce que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ puis vérifier la fonction dérivée de f sur

$$]0, +\infty[\setminus \{1\} \text{ est } f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

e. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0, +\infty[$.



- a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .
- b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .
- c. Calculer $g(4)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$.

6.

PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. ..

- a. Calculer : $g(-2)$.
- b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. ..

- a. Calculer : $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- b. Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
- c. Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$, on précise les deux valeurs pour lesquelles $g(x)$ s'annule.
- d. Montrer que : $g([3, +\infty[) \subset [3, +\infty[$.

DEUXIEME PARTIE

Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} , & x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm) .

1. ..

- a. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$.
- b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats

2. ..

- a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ puis interpréter géométriquement les résultats
- b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- c. Déterminer la position relative de la droite (D) d'équation $y = x$ et la courbe (C_f)
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 1$ (remarquer que $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x-1)$)



a. Vérifier que : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

4. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm).

TROISIÈME PARIE

Soit a est un nombre réel, on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = g(u_n) - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On prend le cas : $a = 2$, montrer que : $u_n = 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. On prend le cas : $a = -2$, montrer que : $u_n = 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3. On prend le cas : $a = 0$, montrer que : $u_n = 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4. On prend le cas : $a = 3$, Montrer que : $u_n \geq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

7.

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm).

1.

a. Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

c. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$.

2.

a. .. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 1$ (remarquer que

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x-1)$$

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

d. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f) . (unité de 2 cm).

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [1, +\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.



b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Déterminer : $g^{-1}(x)$ (remarquer que $x - 2\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)^2$)

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

8.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 - \sqrt{x^2 + 5}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Montrer que : la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

d. déterminer l'intersection de la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

2. ..

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

b. Montrer que : $\sqrt{x^2 + 5} - x \geq 0$ puis en déduire les variations de sur $\mathbb{R}$.

c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0 = -\frac{2}{3}$.

e. Déterminer : $f([1, 2])$ et $f([2, 3])$.

3. ..

a. Etudier le signe de : $f(x) - x$ (remarquer que $f(x) - x = \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$).

b. Etudier la position relative de la droite (Δ) et la courbe (C_f) .

c. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm).

4.

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J =]-\infty, 3[$.

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

- c. Montrer que : la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 2.
- d. Calculer : $f(2)$ puis $(f^{-1})'(2)$.
- 5.** Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- d. Calculer la limite de la suite (u_n) .
- 6.** Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- a. Montrer par récurrence que : $2 \leq v_n \leq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- b. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
- c. En déduire que la suite (v_n) est convergente.
- d. Calculer la limite de la suite (v_n) .

9.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -2 + \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

I.

- 1.** Montrer que : $D_f =]-1, +\infty[$ (D_f ensemble de définition de la fonction f)
- a. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.
- b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction.
- 2.**
- a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-1, +\infty[$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.
- b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.
- c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- d. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0 = -\frac{2}{3}$.
- 3.** ..
- a. Montrer que : pour tout x de $]-1, +\infty[$ que $f''(x) = \frac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$.
- b. En déduire la concavité de la courbe (C_f) et les coordonnées de l'unique point d'inflexion de (C_f) .

4. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm).

5. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0, +\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer $g(3)$ puis montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{4}{3}$.

d. Calculer : $(g^{-1})'(\frac{4}{3})$.

6. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

10.

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^3 + x^2} ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

a. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

c. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera son équation.

e. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x - 1$ sur D_f .

2.

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$.



c. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

d. dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

e. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0 = 0$.

3. ..

a. Vérifier que : $f(x) - (x-1) = \frac{x^2}{x^3 + x^2}$ puis en déduire la position de la courbe (C_f) et la droite (D) .

b. Etudier l'intersection de la droite (Δ) d'équation : $y = x$ et la courbe (C_f) .

c. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm).

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I =]-1, 0]$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ puis montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{6}$.

d. Calculer : $(g^{-1})'\left(\frac{1}{6}\right)$.

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .