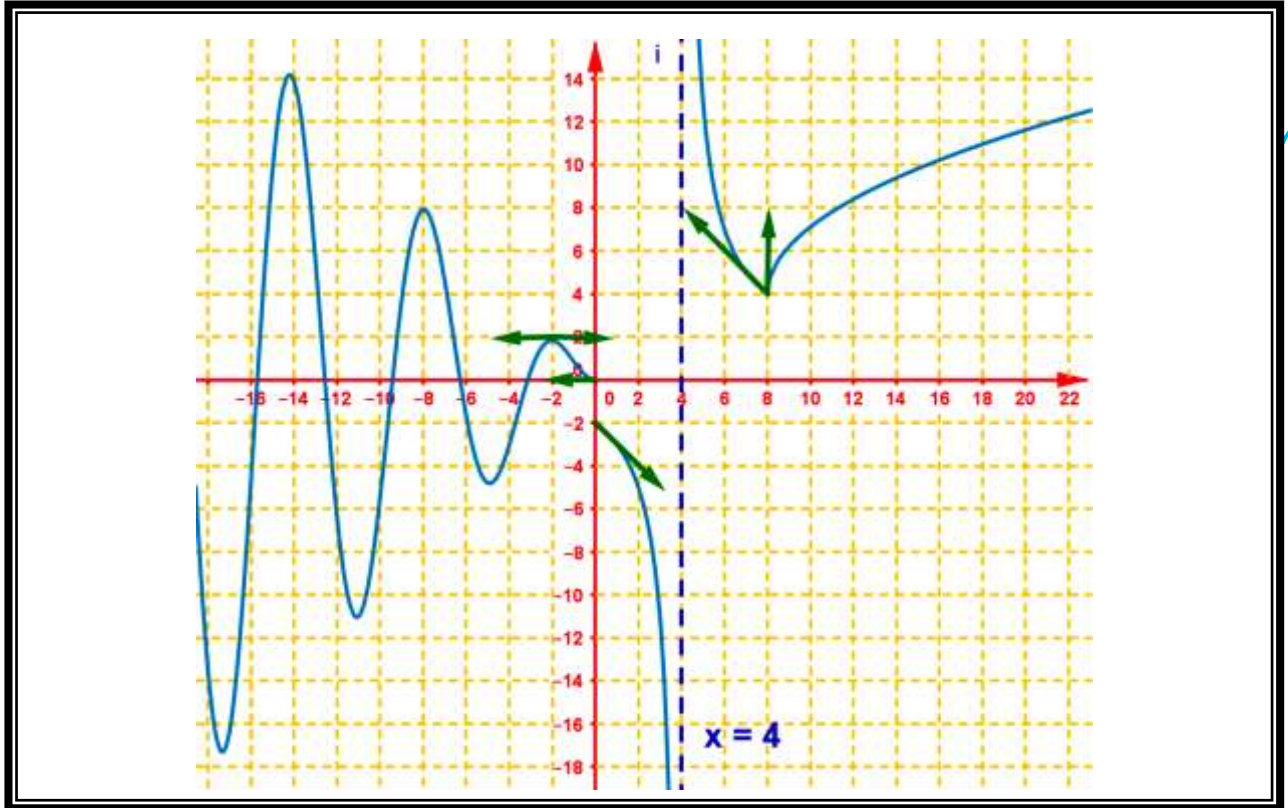


1.

La figure ci-contre représente (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



1. En déduire graphiquement les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

b. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 0}} f(x)$

2. Que peut-on dire de la limite de f au voisinage de $-\infty$.

3. ..

a. Etudier graphiquement la continuité à droite de $x_0 = 0$.

b. Etudier graphiquement la continuité à gauche de $x_0 = 0$.

c. Est-ce que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

4. ..

a. Est-ce que la fonction f est dérivable à droite de $x_0 = 0$.

b. Est-ce que la fonction f est dérivable à gauche de $x_0 = 0$.

c. Est-ce que la fonction f est dérivable en $x_0 = 0$.

d. Donner le nombre dérivé à gauche de $x_0 = 0$.

e. Donner $f'(-2)$.

f. Donner l'équation réduite de la tangente en $x_0 = -2$.

g. Donner l'équation réduite de la demi tangente à gauche $x_0 = 0$.

4. .. On considère g la restriction de la fonction f sur $I_1 = [2, +\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J_1 dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} puis construire la demi tangente à droite de $x_0 = 4$ à la courbe $(C_{g^{-1}})$

5. .. On considère h la restriction de la fonction f sur $I_2 =]0, 4[$.

a. Montrer que la restriction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J_2 dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1} .

2.

Calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f pour chaque fonction s suivante :

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + \frac{7}{5}x + 9$ et $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3x^2 + 1}{x}$ et $f(x) = \frac{7x + 2}{3 - x}$ et $f(x) = (5x + 1)^4$.

2. $f(x) = \sqrt{x} + 3x$ et $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ et $f(x) = x^3 \sqrt{4x + 1}$ et $f(x) = \sqrt{x + 2} \times (5x - 3)^4$

$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x + 2}$ et $f(x) = \sqrt{\frac{3x - 5}{2 - x}}$ et $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x + 7}}$.

3. $f(x) = \sin(5x + 2)$ et $f(x) = \sin^3(x)$ et $f(x) = \sin 2x \cos 3x$ et $f(x) = \tan(3x)$ et $f(x) = x^2 + 3 \sin x$

4. $f(x) = \sqrt[5]{x}$ et $f(x) = \sqrt[3]{x^{11}}$ et $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 7x + 12}$ et $f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{\frac{2}{5}}$.

3.

Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 :

1.

a. $x_0 = 1$ avec $\begin{cases} f(x) = \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

b. $x_0 = 0$ avec $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

c. $x_0 = 1$ avec $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{7x + 1}, x < 0 \\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x + 1}, x \geq 0 \end{cases}$.



2. On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} & ; x \leq 3 \\ f(x) = \frac{x}{x-2} & ; x > 3 \end{cases}$$

- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 3[$ puis déduire le nombre dérivé en $x_0 = 2$.
- Donner la fonction affine approximative de la fonction f en $x_0 = 2$.
- En déduire une valeur approchée du nombre $f(1,999)$.
- Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 3$ puis interpréter le résultat graphiquement.
- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(3, f(3))$.

3. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

- Etudier la dérivabilité en $x_0 = 0$.
- Donner la fonction affine approximative de la fonction f en $x_0 = 0$.
- En déduire une valeur approchée du nombre $f(0,01)$.

4.

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

- Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 1$ puis interpréter le résultat graphiquement.
- Etudier la dérivabilité droite de f au point $x_0 = 0$ puis interpréter le résultat graphiquement.

5.

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} & ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 6x + 8 & ; x < 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que : la fonction numérique f est définie sur \mathbb{R} .

2. ..

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 2$.

3. ..

a. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 2$ puis interpréter le résultat graphiquement.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$ puis interpréter le résultat graphiquement.

c. Est-ce que la fonction f est dérivable en $x_0 = 2$.

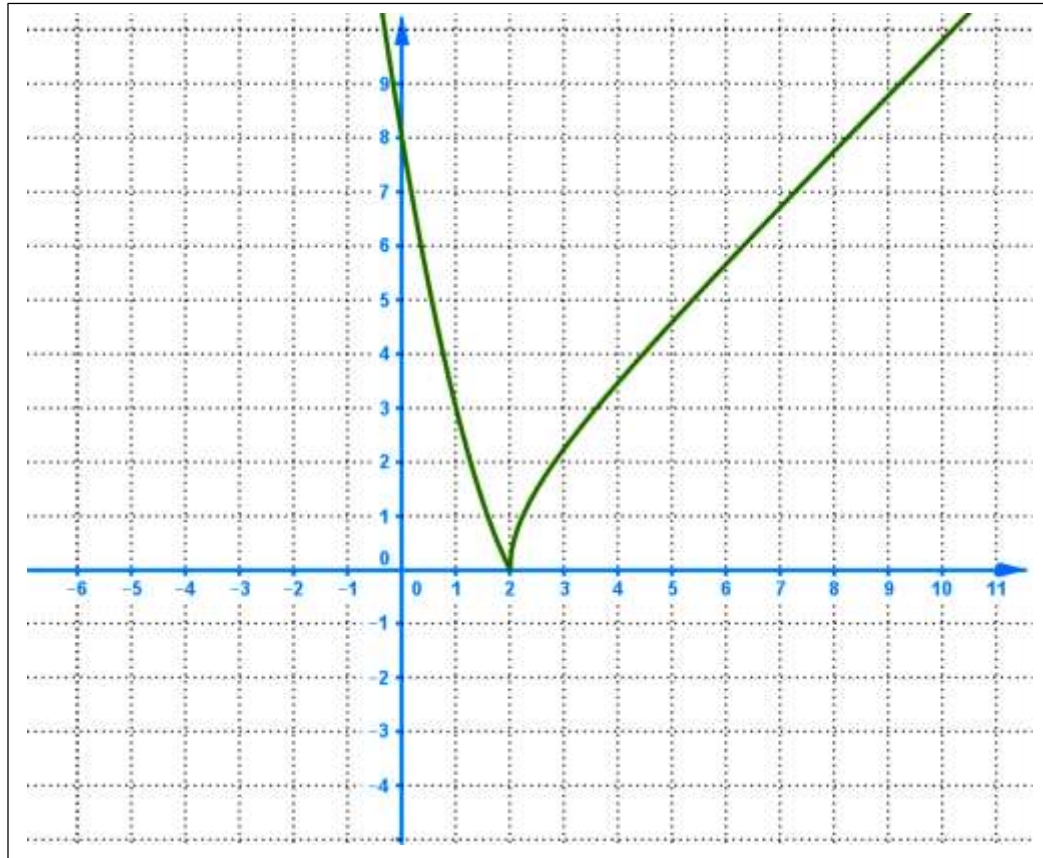
4. ..

a. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

b. Sur l'intervalle $]2, +\infty[$ calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f .

5. ..

- Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.
 - Sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
6. Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point $x_1 = 1$.
7. On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [2, +\infty[$.
- Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera.
 - Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .
 - la figure suivante représente la courbe représentative de la fonction f Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .



8. ..

- Démontrer que l'équation $x \in]-\infty, 2[: f(x) = 3$ admet une unique puis on déterminera graphiquement.
- Démontrer que l'équation $x \in [2, +\infty[: f(x) = 3$ admet une unique puis solution α dont on précisera dans le quel un intervalle $]a, b[$ avec a et b sont deux entiers naturels et $b - a = 1$?
Note : dans cette question on ne demande pas de résoudre cette équation.
- En déduire les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} : f(x) = 3$.

6.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2. ..

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. ..

a. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 0$ puis interpréter le résultat graphiquement.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$ puis interpréter le résultat graphiquement.

4. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]-\infty, 0[$ $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ puis déterminer son signe sur $]-\infty, 0[$.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1, +\infty[$ puis déterminer son signe sur $]1, +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

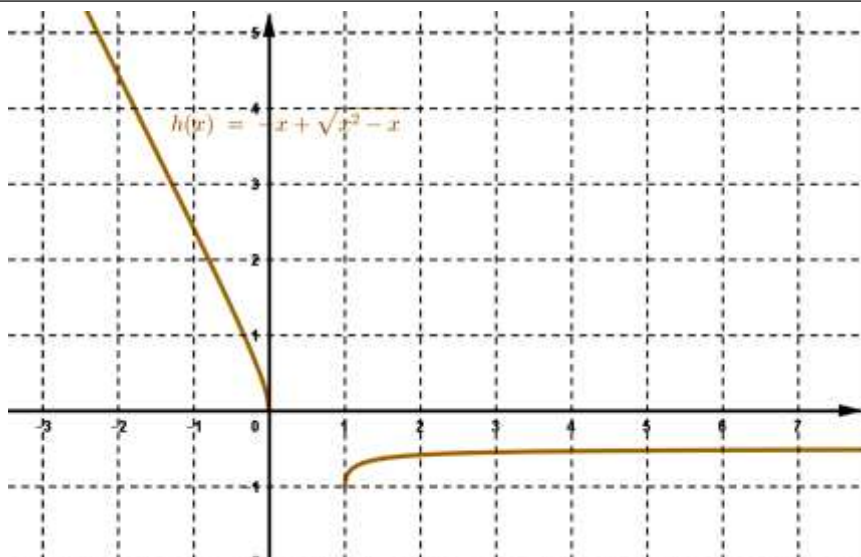
5. ..Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

b. Calculer : $g(2)$ et $(g^{-1})'(-2 + \sqrt{2})$.

c. Expliciter $g^{-1}(x)$.

d. La figure ci-contre représente la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Tracer de 2 cm la courbe représentative de g^{-1}

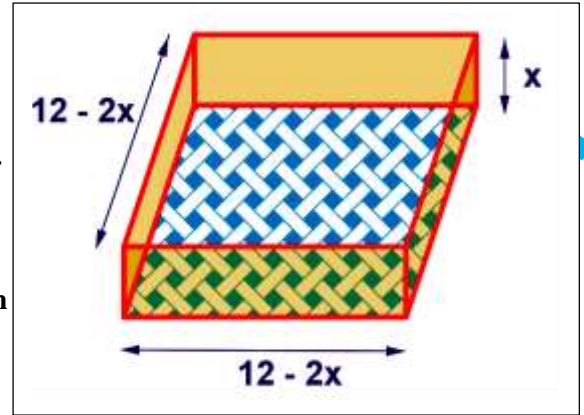


7.

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

1. ..

- Calculer $f'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .
- déterminer son signe sur \mathbb{R} .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, 20]$.



2. Un fabricant des boîtes en carton envisage la production de boîtes de pâtisseries de forme parallélépipédique rectangle tel que chaque boîte :

- Sa hauteur est de longueur x cm (avec $0 < x < 6$).
- Sa base est de la forme d'un carré dont la longueur du côté est : $12 - 2x$ cm.

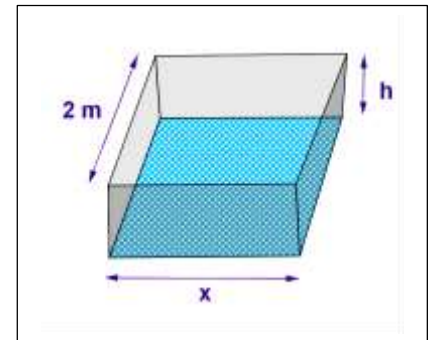
- Vérifier que : $V(x)$ le volume de chaque boîte en fonction de x est : $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
- Donner la valeur de x qui corresponde à une volume maximale

8.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$.

1. ..

- Calculer $f'(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^* .
- déterminer son signe sur \mathbb{R}^* .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R}^* .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, 5; 4]$.
- Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $x_0 = 1$



On se propose de construire un réservoir en tôle de forme parallélépipédique rectangle dont le volume intérieur soit 4 m^3 (mètre cube) . le nombre h est la mesure de la hauteur de ce parallélépipède rectangle et sa base a un coté mesure x m et l'autre pour longueur 2 m.

2. Dédurre des informations données , une relation entre h et x .

- Montrer que : la somme des aires des faces du parallélépipède rectangle (sans le couvercle) en fonction de x s'écrit : $S(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$.
- Déterminer les valeurs de x et de h qui correspondent à une aire minimale .

9.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$ par : $f(x) = 0,06x + \frac{150}{x}$.

- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
- déterminer son signe sur $]0, +\infty[$.



3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[10, 130]$.

5. La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v , pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression suivante : $C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}$.

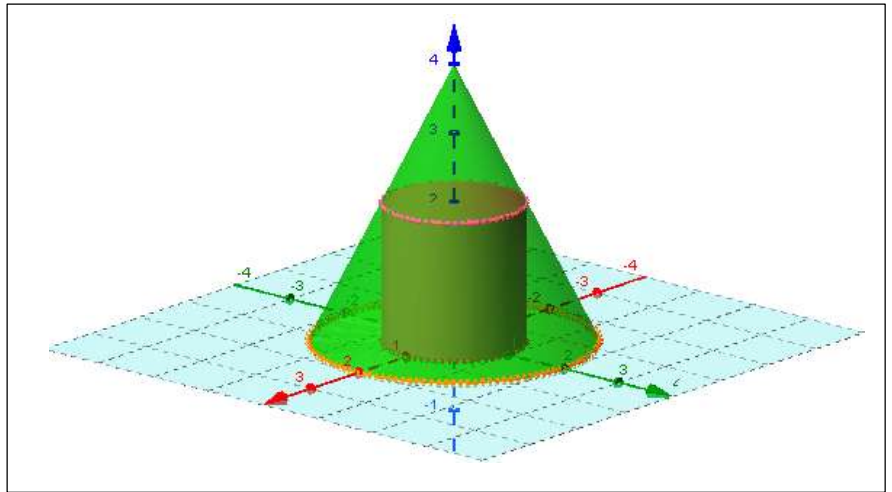
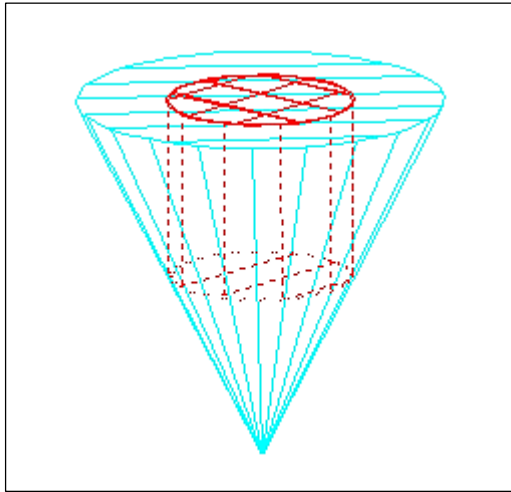
6. A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

10.

Un cylindre de révolution de rayon x cm est inscrit dans un cône de révolution de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm. le volume de ce cylindre, exprimé en cm^2 , est donné par la formule suivante :

$$V(x) = 30\pi x^2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \text{ où } 0 \leq x \leq 10$$

1. Déterminer : x pour que le volume du cylindre soit maximale.



11.

Le nombre d'accident est donné par $A(r) = 20000 - 10r^2$; c'est la fonction de cout. l'optimisation serait la recherche du nombre d'accident minimum A_{\min} et le nombre de radar r_{opt} qui permet d'attendre ce minimum.