Dérivabilité

EL KYAL MOHAMED

Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente à une courbe :

Soit f fonction est dérivable en x_0

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0

est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0, si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0, on le note $f'_d(x_0)$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0, si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0, on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0, si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

- **Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :**

$\left(u+v\right)' = u' + v'$	$\left(ku\right)' = k\left(u\right)' \quad \left(k \in \mathbb{R}\right)$
$\left(uv\right)' = u'v + uv'$	$\left(u^n\right)' = nu'.u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(uov\right)' = \left[u'ov\right] \times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- **Dérivée et sens de variation :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I \quad f'\left(x\right) \geq 0$
- f est **décroissante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I \quad f'\left(x\right) \leq 0$
- f est **constante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I \quad f'\left(x\right) = 0$

- **Interprétation géométrique et dérivabilité :**

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : $\left(C_f\right)$ admet
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{\left(a \neq 0\right)}{a}$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{\left(a \neq 0\right)}{a}$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente à droite au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une demi- tangente horizontale à droite au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le bas
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \underset{\left(a \neq 0\right)}{a}$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente à gauche au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente verticale à gauche au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ dirigée vers le bas