Lycée : Ibn Zohr - Tanger 2BAC PC	Continuité d'une fonction	P. Hicham ESSAFI

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{4x}{|x+2|-|x-2|} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0=0$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-2x} & si \quad x\neq 2 et x\neq 0 \\ f(2)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0=2$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & si \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & si \quad x\leq 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b sachant que la fonction f est continue en $x_0=2$

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation admet une solution unique dans l'intervalle I

1) $\sqrt{x^3+6x+1}=2 \qquad I=[0;2]$
2) $\cos x = x \qquad I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
3) $x^{2021}+x-2021=0 \qquad I=\mathbb{R}$

Exercice 5 : Montrer dans chacun des cas suivants que la fonction f définie sur l'intervalle I admet une fonction réciproque, définie sur un intervalle J que l'on déterminera, puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2} \quad ; I=]-\infty;-2[$
2) $f(x)=x^2-4x \quad ; I=[2;4]$
3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ ؛ $I=[0;1[$

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $I=[-1;1]$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

1) Montrer la fonction f admet une fonction réciproque, définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
2) Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$
3) Montrer que $f^{-1}(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur I.
2) Montrer la fonction f admet une fonction réciproque, définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
3) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$$

Exercice 9 : Soit a et b deux réels tels que : $a<b$ et soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a)>a$ et $f(b)<b$.
Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$.