Exercice 01:

➩ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(2)=\frac{-1}{2} \text{ et } f(x)=\frac{x^2-2x}{|x^2-5|-1}; \text{si } x\neq 2 .$$

1)- Déterminer D_f, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- Montrer que f est continue en $x_0=2$.

Exercice 02:

➩ On considère la fonction f définie par :

$$f(2)=4 \text{ et } f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-x-2}, si\ x\neq 2 .$$

1)- Déterminer D_f .

2)- Montrer que f est continue en $x_0=2$.

3)- a)- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}), f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}$.

b)- Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

Exercice 03:

➩ On considère la fonction f définie par :

$$f(-1)=\frac{-1}{2} \text{ et } f(x)=\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1+x^3}, si\ x\neq -1 .$$

1)- a)- Déterminer D_f .

b)- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

2)- a)- Vérifier que : $(\forall x\in D_f), f(x)=\dfrac{2x-1}{(1-x)(1-x+x^2)}$.

b)- En déduire que f est continue en $x_0=-1$.

Exercice 04:

➩ On considère la fonction f définie par :

$$f(1)=a \text{ et } f(x)=\frac{x^2\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}, si\ x\neq 1 \text{ Où } a\in\mathbb{R}.$$

1)- Déterminer D_f , puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0=1$?

Exercice 05:

➩ *Soit f la fonction définie par :*

$$f(1)=\frac{4}{3} \text{ et } f(x)=\frac{x^2-1}{x+\sqrt{x}-2};\text{si } x\neq 1 .$$

1)- a)- *Justifier que* $D_f=\mathbb{R}^+$.

b)- *Montrer que* f *est continue en* $x_0=1$.

2)- a)- *Justifier que* f *est continue sur chacun des intervalles* $[0;1[$ *et* $]1;+\infty[$.

b)- *En utilisant ce qui précède, montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 06:

➩ *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x-2};\ x\geq 2 \\ \dfrac{3}{3-x};\ x<2 \end{cases} .$$

1)- a)- *Justifier que* $D_f=\mathbb{R}$.

b)- *Montrer que* f *est continue en* $x_0=2$.

2)- a)- *Justifier que* f *est continue sur* $]-\infty;2[$ *et* $[2;+\infty[$.

b)- *En utilisant ce qui précède, montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 07:

➩ *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3+\sin x+\cos x}-2}{x};\ x>0 \\ ax+\sqrt{x^2+x+1};\ x\leq 0 \end{cases} ;\ \text{Où } a\in\mathbb{R} .$$

1)- *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- *Montrer que* f *est continue à droite en* 0.

3)- a)- *Montrer que* f *est continue sur* $]-\infty;0]$ *et* $]0;+\infty[$.

b)- *La fonction* f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *? Justifier votre réponse.*

Exercice 08:

➩ *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$f(1)=a \text{ et } f(x)=\frac{x^2+x-6\sqrt{x}+4}{(x-1)^2};\text{si } x\neq 1 \text{ ; Où } a\in\mathbb{R} .$$

✓ *Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Exercice 09:

✓ Montrer que l'équation $(E): \frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une solution unique α dans L'intervalle $]1;2[$.

Exercice 10:

➩ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1 \ .$$

1)- Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $\left]\frac{-1}{2};0\right[$.

3)- Calculer $f\left(\frac{-1}{4}\right)$, puis en déduire un encadrement de a d'amplitude $0,25$.

4)- Montrer que $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$, puis en déduire que $a < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 11:

➩ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1)- Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b)- Dresser le tableau de variation de f (en justifiant votre réponse).

3)- Déterminer $f(]-\infty,-2]), f([-2;-1[)$, $f(]-1;0])$ et $f([0;+\infty[)$.

4)- On désigne par g la restriction de à l'intervalle $I =]-\infty;-2]$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

b)- Montrer que : $(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4x}}{2}$.

Exercice 12:

➩ Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty;3]$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

1)- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que f est strictement décroissante sur I.

2)- Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1;+\infty[$.

3)- Montrer que : $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

Exercice 13:

⇨ Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x}-2\sqrt{x+1}$.

1)- Justifier que $D_f=[-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2)- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

3)- Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

4)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{1}{4};1\right[$.

b)- Vérifier que : $4\alpha^3+4\alpha^2-1=0$.

Exercice 14:

⇨ Soit f la fonction définie sur $I=]-\infty;-1]$ par : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; puis montrer que f est continue sur I .

2)- Montrer que : $(\forall x\in I), f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$; puis déduire que f est strictement Décroissante sur I .

3)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=[-1;0[$.

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 15:

⇨ Soit f la fonction définie sur $I=[4;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2}{4}+x\sqrt{x}-x+1 .$$

1)- a)- Vérifier que : $(\forall x\in I), f(x)=1-\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)^2$.

b)- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2)- a)- Montrer que : $(\forall x\in I), f'(x)=\frac{-1}{2}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$, puis en déduire Que f est strictement décroissante sur I .

b)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans I , puis Vérifier que $\frac{64}{9}<\alpha<\frac{121}{16}$.

3)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=]-\infty;1]$.

b)- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

c)- En déduire que $\alpha=4+2\sqrt{3}$.

Exercice 16:

➩ On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$.

✓ Déterminer D_f ; puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

Exercice 17:

➩ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1 \ .$$

1)- Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1;1[$.

2)- a)- Dresser le tableau de variation de f sur $[-1;1]$.

b)- Montrer que $f(\alpha) > 0$; puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet Exactement deux solutions dans $]-1;1[$.

Exercice 18:

➩ Soit f la fonction définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$.

1)- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$.

2)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-1;+\infty[$.

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 19:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to 2} \frac{1 + \sqrt[3]{4x} - \sqrt{4x + 1}}{x - 2} \ ; \ \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + \sqrt[3]{x} - 2} \ ; \ \lim_{x \to 2} \frac{6 - \sqrt[3]{4x}.\sqrt{4x + 1}}{x - 2} \ .$$

$$Et \ \lim_{x \to 1} \frac{1}{2\left(1 - \sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)} \ .$$

Exercice 20:

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{3x^4 + x - 4}}{x} \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x}}{x} \ ; \ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x - 3}}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 + x^2} - \sqrt[3]{1 - x^3} \ et \ \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}\right)$$

Exercice 21:

➩ Soit a,b,c des nombres réels strictement positifs tel que : $a+b\le c$.

✓ Montrer que : $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}\Rightarrow(a+b-c)^3+27abc=0$.

Exercice 22:

➩ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x-3$.

1)- Dresser le tableau de variation complet de f .

2)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $2<\alpha<3$.

3)- On pose : $a=\dfrac{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}}{2}$. Montrer que $\alpha=a+\dfrac{1}{a}$.

Exercice 23:

➩ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+1$.

1)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a dans $\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$.

2)- Montrer que l'équation $f(x)\asymp x$ admet une solution unique b dans $]a;+\infty[$.

3)- Montrer que : $\left(\exists c\in]0;a[\right),\sqrt[3]{c+2}.f(c)=2c-a$.

Exercice 24:

➩ Soit f la fonction définie sur $I=[-1;0[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

2)- Montrer que : $\left(\forall x\in]-1;0[\right),f'(x)=-\dfrac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$, puis en déduire que f Est strictement décroissante sur I .

3)- Montrer que l'équation $f(x)=x^3$ admet une solution unique a dans I et que $\dfrac{-3}{4}<a<\dfrac{-1}{2}$.

4)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J Que l'on déterminera .

b)- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

5)- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f^{-1}(x)=f(x)$.

Fin Du Sujet

Bon Courage et Bonne Chance