

## Limites

Prof. Smail BOUGUERCH

**Limites des fonctions** ( $n \in \mathbb{N}^*$ )  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  et leur inverses:

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si $n$ est pair	Si $n$ est impair
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

**Limites des fonctions polynômiales et des fonctions rationnelles au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$  :**

**La limite d'un polynôme au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$  est la limite de son terme de plus grand degré**

**La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$  est la limite du quotient de ses termes de plus grand degré**

**Limite des fonctions trigonométriques:**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

**Limites des fonctions de type :  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$**

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$
$l \geq 0$	$\sqrt{l}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de  $x_0$  ou bien au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$

### Limites et ordre:

$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	$\left. \begin{array}{l}  f(x) - l  \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de  $x_0$  ou bien au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$

### Operations sur les limites:

#### Limite de la somme de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l$			$-\infty$		$+\infty$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>	$-\infty$	$+\infty$	<b>F.I.</b>

#### Limite du produit de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l$	$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$		$+\infty$		$0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>

#### Limite du quotient de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l$		$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		$0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>	

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de  $x_0$  ou bien au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$