

Limites

Prof. Smail BOUGUERCH

Limites des fonctions ($n \in \mathbb{N}^*$) $x \mapsto x^n$ **et** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ **et leur inverses:**

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est pair	Si n est impair
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Limites des fonctions polynomiales et des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

La limite d'un polynôme au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite de son terme de plus grand degré	La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient de ses termes de plus grand degré
--	--

Limite des fonctions trigonométriques:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

Limites des fonctions de type : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$l \geq 0$		$\sqrt[l]{l}$
$+\infty$		$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Limites et ordre:

$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	$\left. \begin{array}{l} f(x) - l \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Opérations sur les limites:

Limite de la somme de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l			$-\infty$		$+\infty$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Limite du produit de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$		$+\infty$		0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite du quotient de deux fonctions:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l		$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	F.I.

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$