

Limites d'une fonction

EL KYAL MOHAMED

➤ **Limites et inverses des fonctions** $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre pair alors:	Si n est un nombre impair alors:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

➤ **Limites des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ / $-\infty$:**

Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

➤ **Limites des fonctions trigonométriques :**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

➤ **Limites des fonctions de type $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces résultats restent valables, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Théorème de comparaison :**

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq U(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Limites et opérations :**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$